



**RADA NAUKOWA DYSCYPLINY  
INŻYNIERIA LĄDOWA, GEODEZJA I TRANSPORT**

**ROZPRAWA DOKTORSKA**

**mgr inż. Izabela Kasprzyk**

**MODEL NUMERYCZNY WYBOCZENIA  
DYNAMICZNEGO PRĘTÓW  
Z WYKORZYSTANIEM METODY  
ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH**

*Numerical model of dynamic buckling of rods  
by using the Finite Element Method*

DZIEDZINA: NAUKI INŻYNIERYJNO TECHNICZNE  
DYSCYPLINA: INŻYNIERIA LĄDOWA, GEODEZJA  
I TRANSPORT

**PROMOTOR**

PROF. DR HAB. INŻ. ADAM PODHORECKI  
POLITECHNIKA BYDGOSKA IM. JANA I JĘDRZEJA  
ŚNIADECKICH W BYDGOSZCZY

**PROMOTOR POMOCNICZY**

DR INŻ. JUSTYNA SOBCZAK - PIĄSTKA  
POLITECHNIKA BYDGOSKA IM. JANA I JĘDRZEJA  
ŚNIADECKICH W BYDGOSZCZY

**Bydgoszcz, rok 2023**



Publikacja wydana na prawach rękopisu



*Serdeczne podziękowania składam Promotorowi  
Panu prof. dr hab. inż. Adamowi Podhoreckiemu  
za wszelką pomoc i uzyskane wsparcie  
podczas realizacji niniejszej rozprawy.*

*Dziękuję również Pani Promotor pomocniczej  
dr inż. Justynie Sobczak – Piąstce za wszelką pomoc.*

*Dziękuję Koleżankom i Kolegom z Politechniki Bydgoskiej  
za wsparcie, pomoc i dobre słowo.*

*Dziękuję mojej Rodzinie oraz Przyjaciółom, którzy zawsze we mnie wierzyli.*

*Szczególnie dziękuję mojemu Mężowi Marcinowi  
oraz dzieciom – Lence i Arturkowi za cierpliwość, wiarę  
oraz wsparcie w chwilach zwątpienia.*

*Dziękuję moim ukochanym Rodzicom, za miłość, wiarę  
i wsparcie – pracę tę dedykuję właśnie Wam.*



## SPIS TREŚCI

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1. Wstęp .....</b>   | <b>9</b>  |
| 1.1. Wprowadzenie.....  | 9         |
| 1.2. Definicja stateczności w sensie Lapunowa .....   | 12        |
| 1.3. Inne stosowane definicje stateczności .....  | 13        |
| 1.4. Podsumowanie .....   | 15        |
| <b>2. Studia literaturowe dotyczące modelowania fizycznego i matematycznego stateczności prętów .....</b> | <b>16</b> |
| 2.1. Przegląd literatury .....  | 16        |
| 2.2. Podsumowanie .....   | 22        |
| <b>3. Przedmiot, cel oraz teza badawcza.....</b>  | <b>24</b> |
| 3.1. Przedmiot i cel rozprawy.....  | 24        |
| 3.2. Teza rozprawy .....  | 24        |
| 3.3. Zakres rzeczowy rozprawy.....  | 24        |
| <b>4. Sformułowanie początkowo-brzegowe wyboczenia prętów .....</b>                                       | <b>25</b> |
| 4.1. Sformułowanie problemu, założenia .....  | 25        |
| 4.2. Deformacja pręta .....   | 25        |
| 4.3. Równania statyczne .....   | 28        |
| 4.4. Równania geometryczne .....  | 29        |
| 4.5. Równania fizyczne .....  | 30        |
| 4.6. Warunki brzegowe i początkowe .....  | 31        |
| 4.7. Równanie pracy wirtualnej.....   | 32        |
| 4.8. Metody rozwiązywania zagadnienia początkowo – brzegowego .....                                       | 35        |
| <b>5. Równania ruchu w metodzie elementów skończonych.....</b>  | <b>36</b> |
| 5.1. Opis elementu skończonego.....   | 36        |
| 5.2. Równania ruchu w MES .....   | 39        |
| 5.3. Klasyfikacja metod numerycznych do bezpośredniego rozwiązywania równań ruchu.....                    | 44        |

|   |            |
|---|------------|
| <b>6. Opis autorskiego modelu obliczeniowego.....</b>                           | <b>54</b>  |
| 6.1. Założenia.....   | 54         |
| 6.2. Przyjęta metoda numeryczna bezpośredniego całkowania<br>równań ruchu.....  | 54         |
| 6.3. Kryterium dotyczące dokładności obliczeń w procesie iteracji<br>.....      | 55         |
| 6.4. Przyjęta definicja stateczności pręta.....                                 | 55         |
| <b>7. Przykłady obliczeń z analizą.....</b>                                     | <b>58</b>  |
| 7.1. Analizowane zadanie, przyjęta funkcja kształtu oraz inne<br>założenia..... | 58         |
| 7.2. Wyznaczenie siły krytycznej przy statycznym obciążeniu .....               | 60         |
| 7.3. Wyznaczenie siły krytycznej przy obciążeniu pręta siłą<br>Heaviside'a..... | 66         |
| 7.4. Wyznaczenie siły krytycznej przy obciążeniu harmonicznym                   | 81         |
| <b>8. Wnioski końcowe .....</b>   | <b>90</b>  |
| <b>LITERATURA .....</b>   | <b>93</b>  |
| <b>STRESZCZENIE .....</b>   | <b>102</b> |
| <b>ABSTRACT .....</b>   | <b>103</b> |



## 1. WSTĘP

### 1.1. WPROWADZENIE

Tematyka dotycząca wybożenia elementów prętowych konstrukcji jest ciągle aktualna. Wiele katastrof budowlanych było rezultatem utraty stateczności pewnych elementów konstrukcyjnych pod wpływem różnego rodzaju obciążeń (fot. 1, 2, 3, 4) . Pręt, konstrukcja, może doznać utraty stateczności zarówno pod wpływem przekroczenia pewnej siły krytycznej lub pod wpływem nagle przyłożonego obciążenia, które ma tak dużą wartość, że skutkuje wybożeniem i w konsekwencji katastrofą. Powodem utraty stateczności mogą być też krytyczne częstotliwości drgań wymuszonych.



Fot. 1. Przykład utraty stateczności prętów w budownictwie [wynalazca.tv]



Fot. 2. Katastrofa hali wystawowej w Katowicach, widoczne elementy konstrukcji, które utraciły stateczność [fot. A. Prugar]

---

*Model numeryczny wybożenia dynamicznego prętów z wykorzystaniem metody elementów skończonych*



Fot. 3. Katastrofa budowlana w Bangladeszu. Przyczyną katastrofy były maszyny szwalnicze, wywołujące drgania konstrukcji [fot. AFP]



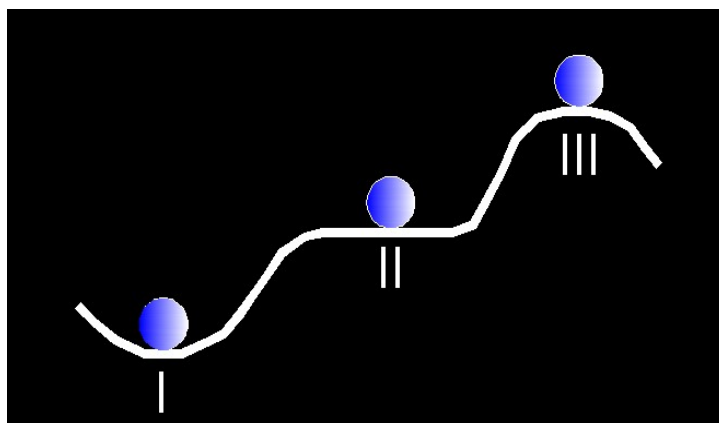
Fot. 4. Katastrofa WTC w Nowym Jorku [fot. PAP/EPA]

Zagadnienia dotyczące stateczności prętów i układów prętowych w zakresie sprężystym były badane przez Eulera już w XVIII wieku [Euler 1759]. Jeżeli pręt zostanie poddany pewnemu krytycznemu obciążeniu ściskającemu siłą osiową traci swoją stateczność, przechodząc ze stanu prostoliniowego w krzywoliniowy. Takie zjawisko nazywa się wyboczeniem. Utrata tej stateczności następuje po

---

*Model numeryczny wyboczenia dynamicznego prętów z wykorzystaniem metody elementów skończonych*

przekroczeniu tzw. siły krytycznej. Siła krytyczna jest to najmniejsza siła ściskająca, przyłożona osiowo do pręta, przy której pręt traci swoją stateczność, tzn. przechodzi z równowagi stałej w równowagę chwiejną, co w istocie oznacza równowagę obojętną. Wraz ze wzrostem siły ściskającej zmienia się stan równowagi pręta poddanego takiemu obciążeniu. Wyróżnia się równowagę stałą, obojętną i chwiejną (rys. 1.1.) [Kasprzyk 2015].



Rys. 1.1. Rodzaje równowagi: I – stała, II – obojętna, III – chwiejna

Pierwszy ze stanów to równowaga stała, w której ciało wychylone z pierwotnego położenia ponownie do niego powraca. Równowaga obojętna ma miejsce, gdy przy dowolnie małym wychyleniu wartość energii potencjalnej nie zmienia się, tzn. ciało pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym. Natomiast równowaga chwiejna to taka, w której ciało wychylone z pierwotnego położenia nie powraca do tego położenia. Stateczność konstrukcji jest cechą charakteryzującą wrażliwość konstrukcji na zaburzenia jej równowagi [Olszowski, Radwańska 2007; Mania 2010]. W analizie statycznej położenie równowagi zależy od stanu obciążenia. Wzrost obciążenia może równowagę tę zakłócić i doprowadzić do utraty stateczności. Poza obciążeniem statycznym konstrukcje doznają obciążeń nagłych, dynamicznych. W analizie utraty stateczności pod wpływem takich obciążeń, utrata stateczności nastąpić może nie tylko w wyniku przekroczenia pewnej wartości obciążenia, ale może być też wynikiem działania drgań wymuszonych i własnych [Kasprzyk 2015].

Stan ruchu wzbudzony ściskaniem podłużnym, podczas którego ugięcia wykazują tendencję nieograniczonego wzrostu określany jest mianem wyboczenia dynamicznego pręta. Ugięcia takie są w rzeczywistości ograniczone, jednak przy dostatecznie intensywnym obciążeniu mogą osiągać niedopuszczalne wartości, co doprowadzić może do trwałego ugięcia pręta [Gryboś 1980]. Dynamika konstrukcji to taki dział mechaniki, który zajmuje się przyczynami powodującymi ruch. Obciążenie dynamiczne jest obciążeniem zmiennym w czasie, pochodzić może np. od sił wiatru, trzęsienia ziemi, fal morskich lub też od ruchu pojazdów

po mostach, czy od ruchu suwnic. Zasadnicze różnice pomiędzy zagadnieniami statycznymi, a dynamicznymi to fakt, że w statyce obciążenia, reakcje w podporach oraz siły wewnętrzne są niezmiennie w czasie, natomiast w dynamice obciążenia oraz siły zewnętrzne i wewnętrzne są funkcjami czasu.

W związku z tym dynamika konstrukcji jest bardziej skomplikowana i wymaga więcej pracy od analizy statycznej. W dynamice, zgodnie z zasadą d'Alemberta powstają siły bezwładności, co jest jednym z podstawowych problemów analitycznych w dynamice konstrukcji [Chmielewski, Zembaty 1998].

Pewne czynniki, takie jak odstępstwa od idealnej prostoliniowości, mimośrodowość siły ściskającej, niejednorodność materiału, przy uderzeniu podłużnym powodują wzbudzenie ruchu poprzecznego. W rozważaniach analitycznych dotyczących wybożenia pręta wzbudzonego ruchem poprzecznym, uwzględnia się zwykle tylko jeden czynnik, tj. odstępstwo od prostoliniowości, czyli wstępne ugięcie osi pręta.

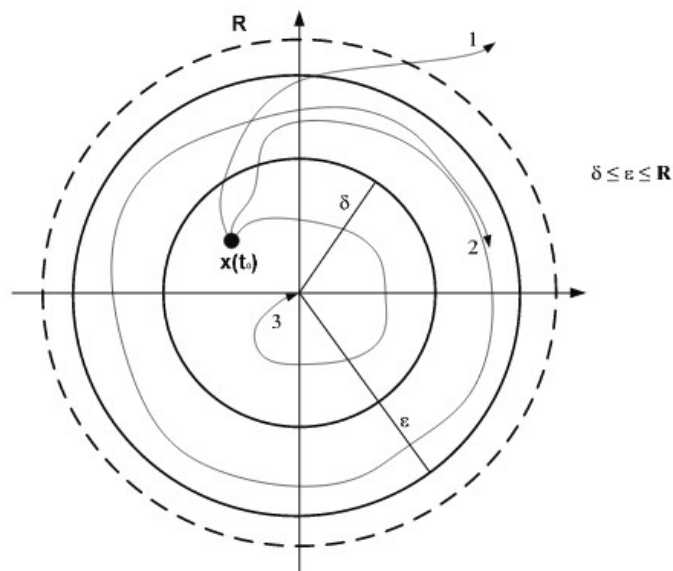
Proces wybożenia uderzeniowego jest procesem falowym. Pojawiają się fale giętne nazywane falami wybożeniowymi. Z badań eksperymentalnych wynika, że podczas wybożenia zmianie ulega nie tylko amplituda, ale również długość fal wybożeniowych. Dlatego wyodrębnia się kilka faz takiego ruchu. Zauważono też, że długość pierwotnej fali wybożeniowej nie zależy od warunków brzegowych i wstępnego ugięcia pręta [Gryboś 1980].

## 1.2. DEFINICJA STATECZNOŚCI W SENSIE LAPUNOWA

Za twórcę opisu stabilności (stateczności) za pomocą równań różniczkowych uważany jest Lapunow [La Salle i in. 1961; Banaś i in. 2011; Mitkowski 1991; Michel 1996]. W swojej pracy przedstawił sposób rozpatrywania stabilności z wykorzystaniem dwóch odrębnych metod. Metoda pierwsza – pośrednia – zakłada, że znana jest postać jawna rozwiązania, która pozwala na badanie stabilności lokalnej. Metoda druga, bezpośrednia, odznacza się dużym stopniem ogólności i skuteczności. Służy do badania stabilności w ograniczonym lub nieograniczonym obszarze przestrzeni stanów układów nieliniowych. Najważniejszą zaletą metody bezpośredniej jest to, że nie wymaga się znajomości rozwiązania równania różniczkowego. Twierdzenie o stabilności według Lapunowa można sformułować następująco [La Salle i in. 1961; Banaś i in. 2011, Mitkowski 1991; Michel 1996] (rys. 1.2):

- stan równowagi jest stabilny, jeżeli dla każdego promienia  $\varepsilon$  istnieje pewien promień  $\delta$ , taki, że jeżeli pewna trajektoria wychodzi z punktu  $x(t_0)$ , znajdującego się wewnątrz obszaru w promieniu  $\delta$ , to będzie ona potem stale pozostawać w obszarze  $\varepsilon$ ,
- stan równowagi jest stabilny, jeżeli każda trajektoria startująca z wnętrza pewnego obszaru jest zbieżna do punktu 0 dla  $t \rightarrow \infty$ ,
- układ jest niestabilny, gdy dla dowolnie dużego  $\varepsilon$  wewnątrz obszaru  $R$  i pewnego dowolnie małego  $\delta$  istnieje zawsze taki punkt początkowy

$x(t_0)$ , dla którego trajektoria wychodzi poza granice hipersfery o promieniu  $\varepsilon$ .



Rys. 1.2. Ilustracja definicji stabilności w sensie Lapunowa:  $x(t_0)$  – punkt początkowy (warunki początkowe), 0 – punkt równowagi, 1 – trajektoria układu niestabilnego, 2 – trajektoria układu stabilnego, 3 – trajektoria układu asymptotycznie stabilnego [Banaś i in. 2011]

### 1.3. INNE STOSOWANE DEFINICJE STATECZNOŚCI

Stabilność jest to zdolność układów mechanicznych do samoczynnego powrotu do stanu równowagi po ustaniu działania czynnika zakłócającego ten stan, natomiast stateczność – to zdolność tych układów do „przeciwstawiania się” takim czynnikom zakłócającym [Remco I. Leine 2010].

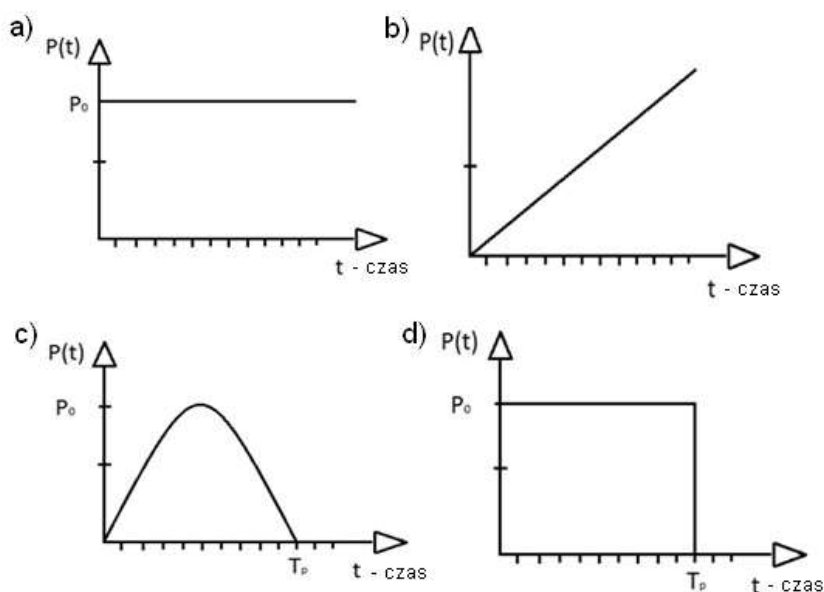
Niestateczność definiuje się na ogół jako proces, w którym niewielka zmiana przyczyny powoduje bardzo dużą zmianę skutku. W definicji tej mieści się zjawisko wyboczenia, kiedy niewielka zmiana siły (przyczyny) powoduje dużą zmianę poprzecznego ugięcia (skutku) [Gawęcki 1998].

Charakter utraty stateczności zależy od rodzaju konstrukcji (pręt, słup itd.) oraz od rodzaju i sposobu przyłożenia obciążenia. W mechanice konstrukcji wyróżnia się obciążenia stałe, nazywane statycznymi oraz obciążenia szybkozmienne określane jako dynamiczne. Przechodząc do stateczności, wyróżnia się teorię stateczności statycznej i dynamicznej. W przypadku obciążeń dynamicznych można wydzielić klasę obciążeń pulsujących, działających dowolnie długo, oraz klasę obciążeń intensywnych, krótkotrwałych, które zostają przyłożone nagle i działają sporadycznie. Pierwsze z tych obciążeń mogą pochodzić np. od sił

bezwładności mas wirujących. Drugie natomiast są uderzeniami, nagłymi zerwaniami więzów, czy też wybuchami – nazywa się je ogólnie obciążeniami uderzeniowymi [Gryboś 1980].

Dla określenia stateczności wyodrębnia się cztery istotne elementy: forma ruchu niezaburzonego (inaczej podstawowego), określenie względem jakich parametrów ruchu bada się stateczność, określenie wymuszeń, które wywołują zaburzenia ruchu oraz określenie przedziału czasu, w jakim badamy stateczność [Gryboś 1980]. Stateczność pod względem matematycznym badań Lagrange, sprowadzając się do wymagania ograniczonej rozwiązań różniczkowych równań ruchu przy niewielkich zaburzeniach [Gryboś 1980].

Stateczność konstrukcji to taka właściwość, która ma polegać na zachowaniu przez nie równowagi statycznej trwałej pod wpływem działania obciążenia zewnętrznego [Timoshenko, Gere 1963; Bielajew 1954; Piechnik 1980, Gawęcki 1984]. Na stateczność wpływ mają obciążenia statyczne oraz dynamiczne. Dynamiczne wymuszenie może mieć różny charakter zależny od czasu działania, może to być też impuls działania obciążenia. Przebieg wcześniej opisanych obciążeń dynamicznych opisany jest funkcją czasu [Mania 2010]. Jeżeli oznaczy się przez  $P(t)$  obciążenie dynamiczne, przez  $P_0$  - amplitudę, a  $T_p$  oznaczać będzie czas działania tego obciążenia, można przedstawić najczęściej analizowane wymuszenia dynamiczne: impuls skokowy (rys. 1.3a), impuls liniowo-narastający (rys. 1.3b), impuls sinusoidalny (rys. 1.3c), impuls prostokątny (rys. 1.3d) [Mania 2010].



Rys. 1.3. Przykładowe wymuszenia dynamiczne (impulsy): a) skokowy, b) liniowo-narastający, c) sinusoidalny, d) prostokątny [Mania 2010]

---

Przytoczone wyżej przykłady obciążeń impulsowych można zinterpretować fizycznie. Kształt sinusoidalny może odpowiadać za obciążenie spowodowane uderzeniem fali morskiej o burtę statku i dalej przenoszące się na jego poszycie. Kształt prostokątny przebiegu obciążenia w czasie może przedstawiać uderzenie masą, która następnie odbija się po uderzeniu. Kształt trapezowy mają impulsy dynamiczne, które powodowane mogą być przez nagłe powiewy wiatru na poszycia skrzydeł samolotu. Przebieg wykładniczy natomiast pokazuje obciążenie wywołane wybuchem. Kształt trójkątny o skokowo zmiennym nachyleniu, jest impulsem opisującym wybuch nuklearny [Mania 2010].

#### 1.4. PODSUMOWANIE

Stateczność układów konstrukcyjnych jest ważnym zagadnieniem naukowym, badawczym i inżynierskim. Elementy konstrukcyjne obiektów budowlanych mogą tracić swoją stateczność pod wpływem różnych obciążeń. Mogą działać na konstrukcje obciążenia quasi statyczne lub obciążenia dynamiczne, np. wywołane pracą różnych maszyn i urządzeń. Mogą to być też obciążenia wywołane silnymi wiatrami, trzęsieniami ziemi, ruchami sejsmicznymi itp.

Problematyka stateczności konstrukcji, zwłaszcza przy dynamicznych obciążeniach jest trudnym i złożonym zagadnieniem początkowo-brzegowym. Jest to ważna i ciągle aktualna tematyka badawcza.

---

## 2. STUDIA LITERATUROWE DOTYCZĄCE MODELOWANIA FIZYCZNEGO I MATEMATYCZNEGO STATECZNOŚCI PRĘTÓW

### 2.1. PRZEGLĄD LITERATURY

Statecznością zaczęto zajmować się już w XVIII wieku, kiedy Euler [Euler 1759] a następnie Lagrange [Lagrange, 1788] określili wartość siły krytycznej dla pręta wspornikowego obciążonego siłą. W dalszych analizach Lagrange [Lagrange, 1788] uogólnił rozważania dotyczące siły krytycznej na inne warunki podparcia i wprowadził równanie wyboczeniowej osi pręta.

W kolejnym stuleciu Young określił strzałkę ugięcia pręta ściskanego mimośrodowo. Pierwszą poprawną wartość siły krytycznej dla pręta pod obciążeniem równomiernie rozłożonym wzdłuż osi podał Greenhill [Greenhill 1881].

Wyboczenie w belkach powstaje w wyniku utraty efektywnej sztywności, co spowodowane jest oddziaływaniem obciążeń ściskających powyżej wartości krytycznej. Prowadzi to do powstania w prętach wyboczonych znacznych przemieszczeń poprzecznych. Wyboczenie można również zdefiniować jako utratę pierwotnej stabilnej ścieżki równowagi, które następuje wraz z przyrostowo zwiększaniem się wartości przyłożonego obciążenia.

Obciążenie wyboczeniowe (wartość krytyczna obciążenia) elementu konstrukcyjnego to poziom obciążenia, przy którym aktualny stan równowagi wstępnie naprężonej staje się niestabilny, w wyniku czego element przechodzi w kolejny stan równowagi. Temu zjawisku mogą towarzyszyć duże przemieszczenia - jeśli element wyboczy się z pierwotnej pozycji równowagi do innego, bliskiego pierwotnemu stanowi równowagi. Wyboczeniu będzie towarzyszyć niewielkie przemieszczenie na krzywej obciążenie-odkształcenie. W tym przypadku krzywa obciążenie - ugięcie jest monotoniczna i ciągła. Jeśli natomiast nowy stan równowagi znacznie odbiega do pierwotnego stanu równowagi to utrata stabilności wiąże się z przeskokami, które są widoczne na krzywej obciążenie- ugięcie. Taka sytuacja może doprowadzić do katastrofalnego zniszczenia konstrukcji.

W osiowo obciążonym początkowo prostym pręcie sprężystym występują pomijalnie małe odkształcenia osiowe do momentu, w którym element ten osiągnie stan krytyczny, tj. stan wyboczenia, co następuje przy krytycznej wartości progowej obciążenia. Początkowe proste położenie pręta określa się jako pierwotną ścieżkę równowagi. Po przekroczeniu obciążenia krytycznego dochodzi do utraty prostoliniowości pręta (utrata stateczności), w wyniku czego element przechodzi do innego stanu równowagi zwanego wtórną ścieżką równowagi. Ten stan krytyczny nazywany jest stanem bifurkacji i oznacza rozdwojenie stanów równowagi. Przy dalszym rosnącym obciążeniu osiowym konstrukcja może albo zachować stan pierwotny, czyli stan, w którym pręt nadal jest osiowo ściskany albo przejść do nowego stanu równowagi, w którym następuje ściskanie ze zginaniem (ściskanie mimośrodowe). Obciążenie, przy którym konstrukcja może znaleźć się



w stanie wyboczenia bifurkacyjnego nazywane jest również obciążeniem wyboczeniowym Eulera, który jako pierwszy rozwiązał problem wyboczenia [Jones, 2006]. Podczas wyboczenia pręta praca wykonana przez przyłożoną siłę osiową jest magazynowana głównie w postaci energii odkształcenia przy zginaniu, oprócz energii odkształcenia spowodowanej odkształceniem osiowym i ścinaniem (jeśli uwzględnimy rozciągłość osiową i odkształcenie ścinające). Z uwagi na to, że po wyboczeniu obciążenie osiowe powoduje również zginanie pręta i jego poprzeczne boczne odkształcenie, po wyboczeniu ten typ konstrukcji jest określany jako belka-słup [Timoshenko i Gere, 1963].

Wyboczenie jest nieliniowym problemem mechaniki konstrukcji. W wyniku liniowej analizy wyboczeniowej, która dotyczy problemu wartości własnych, otrzymuje się obciążenie krytyczne Eulera oraz postaci wyboczeniowe, czyli wartości własne i związane z nimi wektory własne. Oznacza to, że gdy obciążenie przekracza wartość krytyczną, pręt wyboczy się do znanego kształtu z nieokreśloną amplitudą wyboczenia. Dzieje się tak dlatego, że nieliniowa część problemu została zignorowana. Niemniej jednak dla danego obciążenia, które jest większe od obciążenia krytycznego, powinna istnieć postać wyboczeniowa o skończonej wielkości. Wielkość tę można znaleźć z rozwiązania nieliniowego problemu wyboczenia. Odpowiedź po wyboczeniu pokaże, w jaki sposób obciążenie wyboczeniowe przy wyboczeniu jest związane z nośnością pręta. Obecność imperfekcji geometrycznej odgrywa kluczową rolę w określeniu początku wyboczenia oraz rozgałęzienia po wyboczeniu i związanych z nimi stanów. Punkt wyboczenia w obecności imperfekcji nie jest już bifurkacyjny. Nazywa się go raczej punktem zatrzaśnięcia lub punktem granicznym, w którym możliwy jest skok dynamiczny, gdy obciążenie wykracza poza obciążenie wyboczeniowe. Zagadnienia wyboczeniowe i powyboczeniowe dokładnie omówione zostały w następujących pracach: [Jones, 2006; Sewell, 1968a; Sewell 1968b; Hutchinson i Koiter, 1970; Thompson i Hunt, 1973; Budiansky, 1974; Bazant i Cedolin, 2010; Thomson i Hunt, 1984; Simites i Hodges, 2006a; Eisley i Waas, 2011; Lacarbonara, 2013].

W literaturze można znaleźć wiele artykułów naukowych, które dotyczą wyboczenia prętów. Analizowane w artykułach zagadnienia, w zależności od warunków brzegowych, można podzielić na dwie główne grupy, tj. pręty z końcami nieutwierdzonymi (możliwy przesuw wzdłuż osi pręta) oraz pręty o końcach unieruchomionych. W pierwszej grupie, przy zwiększeniu ściskającego obciążenia osiowego, jeden koniec pręta zbliża się do drugiego podczas odkształcenia po wyboczeniu. Taki sposób modelowania pręta umożliwia badanie wyboczenia w przypadku dużych odkształceń. Nie istnieje dokładne rozwiązanie takiego problemu, z wyjątkiem specjalnych przypadków, w których wykorzystuje się całki eliptyczne [Timoshenko i Gere, 1963; Humer i Irschik, 2011a; Humer, 2013]. Jeśli deformacja jest stosunkowo duża, można zastosować pewne przybliżenia dotyczące krzywizny zginania wykorzystując rozwinięcie w szereg Taylora i w ten sposób można uzyskać przybliżone rozwiązanie dla odpowiedzi po wyboczeniu [Emam i Lacarbonara, 2021].

Druga grupa obejmuje przypadki modelowania wyboczenia pręta, którego oba końce są unieruchomione. W takiej sytuacji zwiększenie przyłożonego osiowo obciążenia nie wpływa na wyboczenie pręta, ponieważ to dodatkowe obciążenie zostanie przeniesione przez reakcje podporowe. Innymi słowy, można by się zastanawiać, jak to możliwe, że w tym przypadku istnieje zależność obciążenie-odkształcenie w obszarze wyboczenia. W rzeczywistości problem wyboczenia prętów z nieruchomymi końcami jest zasadniczo inny niż jego odpowiednik dla prętów z ruchomymi końcami. Właściwym sposobem myślenia o wyboczeniu prętów o nieruchomych końcach jest rozważenie np. prętów poddanych działaniu naprężenia wstępnego. Po zakończeniu procesu mikrofabrykacji i z powodu naprężeń szczątkowych, które są poświęcone różnicy w rozszerzalności cieplnej, pręt i podłoże będą poddane ścisłaniu. Jeśli pręt zostanie uwolniony od podłoża, podczas gdy jego końce pozostają nieruchome, może się on wyboczyć. Amplituda wyboczenia w tym przypadku zależy od wielkości naprężenia wstępnego. Gdy unieruchomiony na obu końcach pręt ulega wyboczeniu, powstają naprężenia rozciągające i energia potencjalna w tym przypadku jest związana zarówno ze zginaniem, jak i z rozciąganiem w płaszczyźnie środkowej. Innym przykładem tej klasy modelowania jest wyboczenie prętów pod wpływem obciążeń higrotermicznych, związanych z wilgotnością danego materiału, gdy końce prętów są nieruchome. Również w tym przypadku mamy do czynienia z rozciąganiem w płaszczyźnie środkowej. Ogólnie rzecz biorąc, problemy zaliczane do tej kategorii dotyczą prętów sprężonych, które są poddawane obciążeniom ścisłającym przy jednoczesnym wymuszeniu zachowania stałej odległości pomiędzy końcami. Wyboczenie prętów z ruchomymi końcami jest określane jako kontrola obciążenia, a wyboczenie prętów z końcami nieruchomymi nazywane jest kontrolą przemieszczenia [Bazant i Cedolin, 2010]. Nayfeh i Emam [Nayfeh i Emam, 2008] opracowali zamknięte rozwiązania dla stanów po wyboczeniu prętów o końcach nieruchomych z różnymi warunkami brzegowymi i zbadali stabilność konfiguracji wyboczonej.

Syntezę dotyczącą modelowania wyboczenia prętów o końcach ruchomych i unieruchomionych przedstawili Emmam i Lacarbonara [Emmam i Lacarbonara, 2022]. Autorzy dla każdego z tych przypadków przedstawili założenia przyjęte przy modelowaniu nieliniowego problemu wyboczenia oraz rozwiązania analizowanego zagadnienia.

Wyboczenie prętów z osiowo nieutwierdzonymi końcami Emmam i Lacarbonara [Emmam i Lacarbonara, 2022] analizowali dla trzech modeli, tj. pręta nierozciągliwego nieulegającego ścinaniu (klasyczny problem elastyczności), pręty rozciągliwe nieulegające ścinaniu oraz pręty rozciągliwe podlegające ścinaniu.

Literatura poświęcona analizie stateczności jest bardzo obszerna, jeżeli chodzi o polskie publikacje to warto na pewno wspomnieć o podręcznikach Nalaszkiwicza [Nalaszkiwicz 1958], Brzoski [Brzoska 1961], czy Życzkowskiego [Życzkowski 1988]. Zastosowanie MES do analizy zagadnień stateczności stanowią przede wszystkim monografie Zienkiewicza [Zienkiewicz 1972], Kleibera [Kleiber 1985] i Waszczyszyna i innych [Waszczyszyn i in. 1990]. Tematyka

statycznej utraty stateczności prętów została bardzo dokładnie omówiona w wielu monografiach i publikacjach [Timoshenko, Gere 1963; Brzoska 1965; Jastrzębski i in. 1974; Gawęcki 1984; Misiak 1993].

Teoria stateczności konstrukcji pod obciążeniem pulsującym jest przedstawiona szczegółowo w monografii Bołotina [Bołotin 1956], natomiast dynamiczne wyboczenie konstrukcji wrażliwych na różnego rodzaju niedoskonałości opisał Budiansky i Hutchinson [Budiansky, Hutchinson 1964].

W monografii Misiaka i Stachury [Misiak, Stachura 2010] analizowano zarówno stateczność statyczną i dynamiczną konstrukcji prętowych, płytowych i powłokowych. Do analizy stateczności zastosowano metodę elementów skończonych. Analizowano zakres liniowy i nieliniowy, w trakcie obliczeń aktualizowano opis geometrii, a równania równowagi rozwiązano metodą Newtona-Raphsona. W pracy przedstawiono przybliżoną metodę wyznaczania obciążeń krytycznych dla płaskich konstrukcji prętowych przy utracie stateczności płaskiej postaci zginania. W monografii nie wyznaczono przemieszczeń poziomych pręta, dla którego dokonywano obliczeń,

Kuzkin [Kuzkin 2015] w swojej pracy analizował wyboczenie belki przy ścisaniu siłą działającą ze stałą szybkością. Wyprowadził analityczny model belki z jednym stopniem swobody, który miał pokazać statyczne i dynamiczne wyboczenie słupa. Autor wykazał, że w przypadku niewielkich wstępnych zaburzeń zaproponowany model daje proste zależności analityczne pomiędzy głównymi parametrami: siłą krytyczną, szybkością ścisania i zaburzeniami początkowymi. Czas potrzebny do uzyskania wyboczenia jest odwrotnie proporcjonalny do pierwiastka sześciennego prędkości ścisania i zależy logarymicznie od zaburzeń początkowych. Kuzkin analitycznie wyprowadził siłę krytyczną w funkcji prędkości ścisania. Wykazał, że jego analityczne wyprowadzenia są poparte dostępnymi wynikami badań laboratoryjnych (eksperymentalnych).

Statyczne oraz dynamiczne wyboczenie pręta wspornikowego obciążonego różnymi rodzajami sił: siłą osiową, równomiernym momentem zginającym oraz momentem zginającym wywołanym skupionymi oraz rozłożonymi siłami poprzecznymi przedstawili w swojej pracy Yang i inni [Yang i in. 2012]. Autorzy szczegółowo omówili wpływ sztywności na wyboczenie, sztywność skrętną, oraz wpływ rozciągania i ścisania osiowego na wyboczenie. Analizę przeprowadzono przy wykorzystaniu metody elementów skończonych splajnu (krzywej B-sklejanej). W efekcie okazało się, że ta metoda jest bardzo efektywna dla takiego przypadku i można łatwo wykreślić wiele diagramów interakcji.

W literaturze znaleźć można różne kryteria utraty stateczności smukłych układów. Układ smukły to taki układ, którego zniszczenie następuje w wyniku utraty stateczności, a nie z powodu wyężenia materiału [Tomski i in., 2004]. W swojej monografii autorzy zawarli wyniki badań zarówno teoretycznych, numerycznych, jak i eksperymentalnych, zagadnienia drgań swobodnych i stateczności układów smukłych (kolumn).

Analizę stateczności prętów krępych spoczywających na podłożu sprężystym przeprowadziły Dudzik i Obara [Dudzik, Obara, 2010]. W analizowanym pręcie

nie uwzględniono przemieszczeń poziomych powstałych w skutek działania przyłożonej siły. Obliczenia wykonano przy użyciu metody elementów skończonych w programie Mathematica.

Obara [Obara 2003] sformułowała równanie ruchu dla pręta krępego, który ściskany jest siłą osiową zmienną w czasie. Siła działająca na pręt swobodnie podparty powoduje powstanie w pręcie drgań podłużnych, które odbywają się ze stałą częstością i skończoną amplitudą. W analizie uwzględniono odkształcalność postaciową, nie uwzględniono natomiast przemieszczeń pionowych podpory pręta, których element doznał podczas działania siły.

Zagadnienie dotyczące wyboczenia prętów stalowych poddanych obciążeniu uderzeniowemu rozpatrywali Brzuzy i Bąk [Brzuzy, Bąk 2018]. Do analizy wykorzystano metodę różnic skończonych. Przyjęto, że czynnikiem, który inicjuje niestabilne zachowanie pręta jest jego ciągła deformacja osi. Analizę oparto na równaniu dynamiki sprężystej, które zostało wyprowadzone przy zaniedbaniu zasady zeszywnienia. Uwzględniono falową reakcję wzdłużną pręta, nie uwzględniono obciążenia poprzecznego, ale przyjęto zadane imperfekcje jego osi podłużnej. Do analiz przyjęto dwa rodzaje prętów: wiotki i krępy, co spowodowało konieczność stosowania różnych wartości kroków czasowych całkowania równań w czasie. W efekcie zauważono, że działanie obciążenia niezaniakającego, które miało charakter uderzeniowy, powodowało lawinową utratę stateczności, ale po upływie pewnego czasu. Czas ten zależał od smukłości pręta zależnej od smukłości granicznej wg Eulera.

Kenny i in. [Kenny i in. 2000] analizowali dynamiczne wyboczenie sprężyste pręta smukłego z początkowymi niedoskonałościami geometrycznymi wzbudzone impulsem osiowym. Stan wyboczenia pręta opisany został modelem numerycznym z pomocą metody różnic skończonych oraz metody elementów skończonych. Na podstawie przeprowadzonej analizy numerycznej, przy wykorzystaniu dostępnych pakietów oprogramowania ADINA, ANSYS i NISA, autorzy wykazali, że charakterystyczny wykładniczy wzrost przemieszczeń wyboczeniowych zainicjować mogą tylko losowe imperfekcje geometryczne. Szczegółowe modelowanie szczytowej amplitudy wyboczenia i odpowiedzi modalnej wymagało przyjęcia współczynników kształtu w proporcji 1:1. Autorzy wykazali, że przyjęte przez nich modele różnic skończonych zgodne są z wynikami analiz teoretycznych. Efektywność modeli elementów skończonych z kwadratowymi, płaskimi odkształceniami była lepsza niż elementów prętowych. Było to związane z nieodłącznymi ograniczeniami krzywizny określonymi przez równanie Eulera-Bernoulliego dla elementu prętowego. Autorzy analizowali kryterium wyboczenia na podstawie intensywności obciążenia krytycznego.

Analiza numeryczna problemu dynamicznego wyboczenia utwierdzonego pręta kompozytowego obciążonego osiowo impulsem wzbudzonym przez ciało sztywne przeprowadzona została przez Liu i in. [Liu i in. 2019]. Autorzy wyprowadzili równanie wyboczenia dynamicznego pręta przy wykorzystaniu zasady Hamiltona. Do rozwiązania tego równania wykorzystali metodę centralnych róż-

nic skończonych i określili postać wyboczenia pręta kompozytowego pod wpływem różnej masy uderzenia przy przyjęciu różnych ugięć początkowych, prędkości uderzenia oraz długości krytycznej. Na podstawie przeprowadzonych analiz stwierdzili, że prędkość uderzenia, masa uderzenia i długość krytyczna mają istotny wpływ na dynamiczne wyboczenie prętów kompozytowych, a zmiany początkowego ugięcia w istotny sposób wpływają na postać wyboczenia.

Analizę doświadczalną dynamicznego wyboczenia prętów kruchych pod wpływem osiowego uderzenia pociskiem, przeprowadzili Gladden i in. [Gladden i in. 2005]. Analitycznie wyprowadzono preferowaną długość fali wyboczeniowej, a następnie doświadczalnie sprawdzono otrzymane wyniki w zależności od materiału, z którego wykonany jest pręt (teflon, suchy makaron, szkło i stal). Dowiedziano, że w przypadku kruchych materiałów wyboczenie będzie prowadzić do rozdrobnienia pręta. Niemonotoniczny charakter rozkładów długości fal pokazuje, że istnieje ścisła zależność pomiędzy procesem wyboczenia a procesem fragmentacji.

Wyniki badań doświadczalnych modeli prętów pod wpływem działania pionowego obciążenia uderzeniowego, przedstawili Migda i Jankowski [Migda, Jankowski 2010]. Jako model słupa przyjęto pręt stalowy ze wstępną deformacją. Na pręt zrzucono, z różnych wysokości, kule z plasteliny, które miały imitować obciążenia uderzeniowe powstające w trakcie trzęsień ziemi. Mierzono pionowe przyspieszenia platformy, do której zamocowany był pręt, przyspieszenia kuli będącej obciążeniem oraz poziome przemieszczenia środka pręta. Efektem tych badań jest stwierdzenie, że poziom zarejestrowanych wartości przyspieszeń i przemieszczeń zależał od wstępnej deformacji pręta. Jeżeli wysokość upadku kuli (więc również jej wartość przyspieszenia) nie przekracza pewnego poziomu, to pomimo wstępnego ugięcia i wstępnego obciążenia, pręt potrafi przenieść dość znaczne obciążenia dynamiczne.

Śród wielu eksperymentów dotyczących uderzeniowego wyboczenia prętów warto wspomnieć o doświadczeniach Abrahamsona i Goodiera [Abrahamson, Goodier 1966], w których mierzono długość fal wyboczeniowych, zarówno sprężystych jak i plastycznych.

Dynamiczne wyboczenie prętów sprężysto – plastycznych jest tematem wielu artykułów. Wśród autorów zajmujących się tym zagadnieniem można wymienić Karagiozową i Jones'a [Karagiozowa, Jones 1995], którzy przedstawili zastosowanie wrażliwego na imperfekcje, prostego modelu sprężysto – plastycznego do zbadania nieliniowego wyboczenia słupów krótkich. W swojej pracy przedstawili osiowe obciążenie udarowe modelu masą o zadanej prędkości początkowej. Na podstawie wyników badań wykazali, że większa masa obciążeniowa przy uderzeniu w model prowadzi do większych przemieszczeń bocznych przy wyboczeniu, natomiast niestabilność pręta jest bardziej wrażliwa na istnienie początkowych niedoskonałości przy większych prędkościach uderzenia. Autorzy przedstawili pewne wskazówki dotyczące wyboru różnych parametrów w modelu, w celu przeprowadzania analiz praktycznych konstrukcji inżynierskich.

Lepik [Lepik 2000; Lepik 2001] w swoich pracach przedstawił analizę teoretyczną zagadnienia dynamicznego wyboczenia prętów sprężysto – plastycznych pod wpływem działania osiowych sił ściskających. W swoich obliczeniach pominął efekty bezwładności osiowej. Autor przedstawił numeryczny sposób całkowania równań ruchu. W swojej drugiej pracy autor przedstawił wyboczenie osiowo ściskanych prętów sprężysto – plastycznych, do których obciążenie przykładane było natychmiast i nie zmieniało się już podczas ruchu. Uwzględniono wpływ fal naprężeń biegnących wzdłuż pręta.

Ponownie tematem sprężysto – plastycznych elementów konstrukcyjnych zajęli się Karagiozova i Alves [Karagiozova, Alves 2008] dokonując przeglądu wiedzy dotyczącej niesprężystej stateczności dynamicznej i zachowania się pokrytycznego różnych elementów konstrukcyjnych. Omówiono w artykule badania odpowiedzi dynamicznej obciążonych osiowo modeli sprężysto – plastycznych prętów, powłok oraz rur, uwzględniając wpływ cech geometrycznych i materiałowych na zjawisko wyboczenia.

Jabareen i Sheinman w swojej pracy przedstawili model analityczny nieliniowego zachowania pręta na nieliniowym podłożu sprężystym, poddanej nagłemu ściskaniu osiowemu. Zastosowali dwa dynamiczne kryteria wyboczeniowe, jedno oparte na pełnej analizie dynamicznej, a drugie wyłącznie na analizie statycznej [Jabareen, Sheinman 2009].

Kowal-Michalska [Kowal-Michalska 2010] w swojej pracy przedstawiła wpływ następujących czynników: początkowe imperfekcje, kształt i czas trwania impulsowego obciążenia na odpowiedź dynamiczną struktur płytowych; Autorka omówiła również wpływ właściwości materiałów w zakresie plastycznym oraz ocenę zdolności konstrukcji do przenoszenia dynamicznych obciążeń impulsowych w oparciu o różne kryteria stabilności dynamicznej.

Jako przykład ważności tematyki wyboczenia można przytoczyć pracę zespołu Yang Yu i innych [Yang Yu i in. 2021], którzy opisali wyboczenie jako jeden z największych problemów związanych z bezpieczeństwem rurociągów podmorskich. W swojej pracy przedstawili badania eksperymentalne oraz analizy numeryczne zachowań wyboczeniowych rurociągu podmorskiego z integralnymi ogranicznikami wyboczenia pod wpływem ciśnienia zewnętrznego.

## 2.2. PODSUMOWANIE

Wyboczenie w elementach prętowych było tematem wielu publikacji, zaczynając już od XVIII wieku. Przez wiele stuleci temat był wielokrotnie analizowany, zarówno matematycznie, jak i doświadczalnie i nadal stanowi bardzo ciekawe i ważne zagadnienie. Wyboczenie jest problemem nieliniowym, co powoduje wiele trudności obliczeniowych, sformułowania matematyczne tego zagadnienia są skomplikowane. Dlatego w wielu publikacjach pomija się problem nieliniowości bardziej złożonych, co w konsekwencji może prowadzić do niedokład-

---

nych, a nawet błędnych wyników obliczeń. Istotne znaczenie ma przyjęcie schematu statycznego konstrukcji oraz uwzględnienie różnego rodzaju imperfekcji (np. wstępna krzywizna, nieosiowe obciążenia).

W niniejszej pracy analizuje się wyboczenie pręta krępego ze wstępną krzywizną, obciążonego siłą zmienną w czasie  $P(t)$ . W sformułowaniu zagadnienia początkowo-brzegowego uwzględnia się zaawansowane nieliniowości geometryczne oraz wszystkie podstawowe siły bezwładności.

Niniejsza praca ma na celu pokazanie bardzo dokładnego opisu matematycznego wyboczenia dynamicznego prętów oraz opracowanie numerycznego modelu obliczeniowego z użyciem metody elementów skończonych (MES) i metody bezpośredniego całkowania równań ruchu (metoda Newmarka).

---

### 3. PRZEDMIOT, CEL ORAZ TEZA BADAWCZA

#### 3.1. PRZEDMIOT I CEL ROZPRAWY

Przedmiotem rozprawy jest wyboczenie pręta krępego od dynamicznego działania siły ściskającej, pręta wstępnie, beznapężeniowo zakrzywionego o danej funkcji  $w_0(x, t_0)$ , jednorodnego, o gęstości objętościowej  $\rho$ , liniowo sprężystego i izotropowego o cechach  $E, G$ , niezmiennym polu przekroju poprzecznego  $A$  i momencie bezwładności  $I$ . Analizowany jest ośrodek geometrycznie nieliniowy.

Celem pracy jest opracowanie efektywnego, numerycznego modelu obliczeniowego służącego do analizy wyboczenia prętów (z zaawansowanymi nieliniowościami geometrycznymi) obciążonych dynamicznie siłą ściskającą. Do rozwiązania takiego zagadnienia początkowo-brzegowego postanowiono zastosować metodę elementów skończonych (MES) oraz metodę bezpośredniego całkowania równań ruchu (metodę Newmarka).

#### 3.2. TEZA ROZPRAWY

Teza pracy (rozprawy) jest następująca:

*Możliwe jest uzyskanie efektywnego rozwiązania zagadnienia początkowo – brzegowego wyboczenia dynamicznego prętów z wykorzystaniem metody elementów skończonych i metod bezpośredniego całkowania równań ruchu.*

#### 3.3. ZAKRES RZECZOWY ROZPRAWY

Niniejsza praca składa się z 8. rozdziałów. Zakres pracy obejmuje następującą problematykę:

- wprowadzenie do tematyki stateczności,
- studia literaturowe dotyczące modelowania fizycznego i matematycznego stateczności prętów,
- sformułowanie początkowo-brzegowe wyboczenia prętów,
- równania ruchu w metodzie elementów skończonych z wykorzystaniem metody bezpośredniego całkowania równań ruchu (metodą Newmarka),
- opis przyjętego modelu obliczeniowego,
- przykłady obliczeń z analizą,
- wnioski końcowe.

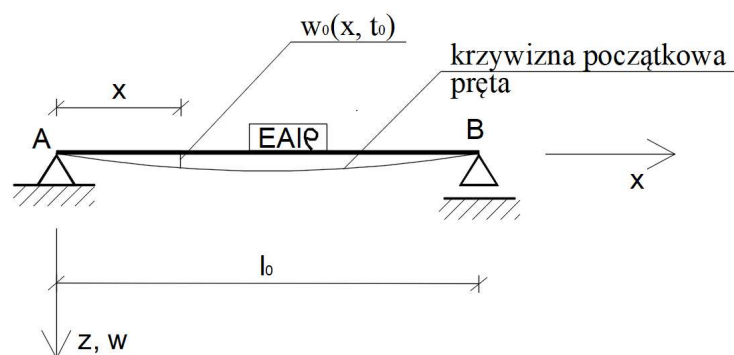
W szczególności zdefiniowano kryteria iteracyjnego rozwiązywania równań rekurencyjnych (wg. metody Newmarka) oraz przyjęto definicję stateczności.



## 4. SFORMUŁOWANIE POCZĄTKOWO-BRZEGOWE WYBOCZENIA PRĘTÓW

### 4.1. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU, ZAŁOŻENIA

Rozpatrujemy pręt krępy, wstępnie, beznapężeniowo zakrzywiony (o niewielkiej krzywiznie) o danej funkcji  $w_0(x, t_0)$ , jednorodny, o gęstości objętościowej  $\rho$ , liniowo sprężysty i izotropowy o cechach  $E$ ,  $G$ , niezmiennym polu przekroju poprzecznego  $A$  i momencie bezwładności  $I$ . Pręt ten jest obciążony siłą konserwatywną zmienną w czasie  $P(t)$  (rys. 4.1).



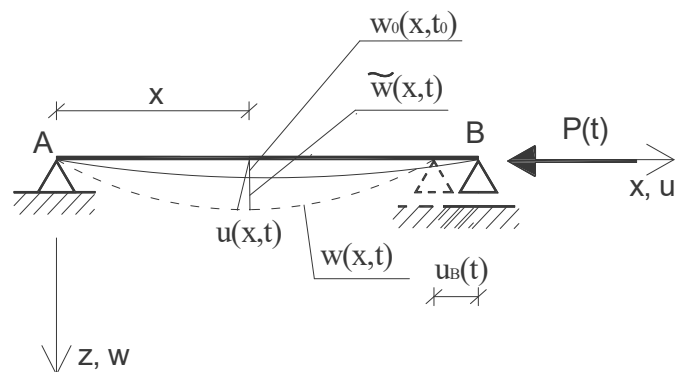
Rys. 4.1. Stan początkowy pręta, tzn. przed przyłożeniem siły  $P(t)$  [opracowanie własne]

Analizuje się ośrodek/pręt podlegający nieliniowym przemieszczeniom i odkształceniom, czyli ośrodek geometrycznie nieliniowy. Oznacza to m.in., że np. równania równowagi formułowane będą dla układu zdeformowanego.

Poszukujemy wielkości krytycznych powodujących niestabilność/niestateczność, tj. siły  $P_{KR}$  i częstości  $\omega_{KR}$  dla  $t \geq 0$ . Istotne tutaj jest to, że siła  $P$  oraz postać linii ugięcia skrócenia pręta i częstość  $\omega$ , odpowiadająca tym wartościom krytycznym, są ze sobą sprzężone.

### 4.2. DEFORMACJA PRĘTA

Pod wpływem działania siły  $P(t)$ , tzw. stan początkowy pręta opisany daną funkcją ugięcia  $w_0(x, 0)$  ulega zmianie, pojawiają się przemieszczenia poprzeczne  $w(x, t)$  i przemieszczenia podłużne  $u(x, t)$  (rys. 4.2).



Rys. 4.2. Stan pręta przy działaniu siły  $P(t)$  tzw. stan aktualny (zmienny w czasie)  
[opracowanie własne]

Rozpatrując geometrię odkształconego elementarnego odcinka pręta  $dx$  (rys. 4.3) zauważamy, że dwie płaszczyzny przekroju poprzecznego AB i CD, pierwotnie do siebie równoległe, po odkształceniu obracają się względem siebie o kąt  $d\psi$ . Kąty w narożach A, B, C i D, które pierwotnie były proste, wskutek odkształceń postaciowych zmieniają się o  $\gamma$  w narożach A, B i  $\gamma + d\gamma$  w narożach C i D. Te same kąty tworzą wektory sił normalnych z kierunkiem stycznej do osi ugiętej. Wektory tych sił natomiast nachylone są do osi  $x$  pod kątami  $\psi$  i  $\psi + d\psi$  [Gryboś 1980]. Siły przekrojowe ( $N$  – siła normalna,  $T$  – siła poprzeczna) muszą być skojarzone z tymi kątami  $\psi$  i  $\gamma$ .



gdzie:

$w_0(x, t_0) = w_0(x, 0)$  jest ugięciem początkowym, jest to funkcja dana, jest to w istocie warunek początkowy,

$\bar{w}(x, t)$  jest to nieznaną funkcją ugięcia spowodowaną działaniem siły  $P(t)$ .

Poszukujemy składowych stanu przemieszczeń  $u(x, t)$ ,  $w(x, t)$  oraz parametrów siły  $P(t)$  powodujących utratę stateczności pręta. Przyjmujemy, że przemieszczenia  $w(x, t)$  mogą być w zasadzie dowolne, ponadto uwzględniamy wpływ odkształceń postaciowych na krzywiznę pręta oraz wszystkie składowe sił bezwładności. Badamy stan przedstawionego układu w przedziale czasu  $t \in \langle 0, t_1 \rangle$ . Mamy zatem do czynienia z zagadnieniem początkowo – brzegowym.

### 4.3. RÓWNANIA STATYCZNE

Równania równowagi piszemy dla układu zdeformowanego (rys. 4.3):

$$\begin{aligned} \sum P_x = 0; & [-N \cos \psi + (N + dN) \cos(\psi + d\psi)] + \\ & + [T \sin \psi - (T + dT) \sin(\psi + d\psi)] - \\ & - \rho A \ddot{u} dx = 0; \\ \sum P_z = 0; & [-N \sin \psi + (N + dN) \sin(\psi + d\psi)] + \\ & + [-T \cos \psi + (T + dT) \cos(\psi + d\psi)] - \\ & - \rho A \ddot{w} dx = 0; \\ \sum M_I = 0; & [T dx + N(dw - \psi dx) + M] - (M + dM) - \\ & - \rho I \ddot{\psi} dx = 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Przy umiarkowanym kącie możemy przyjąć, że  $\cos \psi \cong 1$ ,  $\cos(\psi + d\psi) \cong 1$ ,

$$\sin \psi \cong \psi, \quad \sin(\psi + d\psi) \cong \psi + d\psi \quad (4.3)$$

W związku z tym równania (4.2) przyjmą postać:

$$\begin{aligned} dN - T d\psi - (\psi + d\psi) dT - \rho A \ddot{u} dx &= 0; \\ Nd\psi + (\psi + d\psi) dN + dT - \rho A \ddot{w} dx &= 0; \\ N(dw - \psi dx) + T dx - dM - \rho I \ddot{\psi} dx &= 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Korzystając z definicji różniczki zupełnej otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}(T\psi) - \frac{\partial T}{\partial x}d\psi - \rho A\ddot{u} &= 0; \\ N \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial x}(\psi + d\psi) + \frac{\partial T}{\partial x} - \rho A\ddot{w} &= 0; \\ N \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) + T - \frac{\partial M}{\partial x} - \rho I\ddot{\psi} &= 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Wyrazy  $\frac{\partial T}{\partial x}d\psi$  oraz  $\frac{\partial N}{\partial x}d\psi$  są o rząd wielkości mniejsze od pozostałych wyrazów, stąd mogą być pominięte. Zatem końcowa postać równań równowagi (statycznych) jest następująca:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}(T\psi) - \rho A\ddot{u} &= 0; \\ N \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial x}\psi + \frac{\partial T}{\partial x} - \rho A\ddot{w} &= 0; \\ N \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) + T - \frac{\partial M}{\partial x} - \rho I\ddot{\psi} &= 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

#### 4.4. RÓWNANIA GEOMETRYCZNE

Równania geometryczne, z uwzględnieniem nieliniowości mają następującą postać [Gryboś 1980]:

- wydłużenie względne na kierunku niezdeformowanej osi pręta

$$\varepsilon_x(x, t) = \varepsilon(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} \right)^2 ;$$

po uwzględnieniu (4.1) mamy

$$\varepsilon(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right] ; \quad (4.7)$$

- kąt odkształcenia postaciowego (odkształcenia kątowe)

$$\gamma_{zx}(x, t) = \gamma(x, t) = \frac{\partial w}{\partial x} - \psi; \quad (4.8)$$

➤ krzywizna osi pręta

$$\kappa(x, t) = \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (4.9)$$

gdzie  $(x, t) \in l \times \langle 0, t_1 \rangle$ ;

$w_0$  - funkcja ugięcia w chwili początkowej  $t=0$  – funkcja dana.

#### 4.5. RÓWNANIA FIZYCZNE

Rozpatrujemy ośrodek fizycznie liniowy podlegający prawu Hooke'a, stąd poszczególne siły przekrojowe wyrażamy następująco (rys. 4.4):

- siła podłużna (normalna)

$$N_x(x, t) = N(x, t) = EA\varepsilon(x, t) = EA \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right] = EA\varepsilon ; \quad (4.10)$$

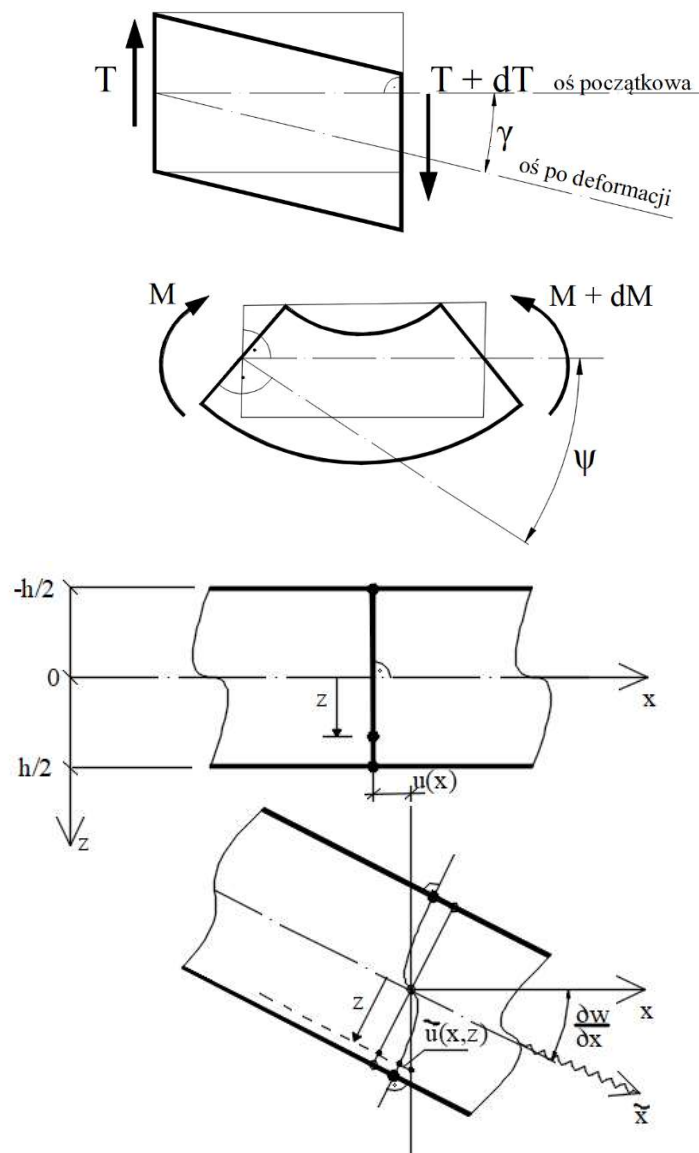
- siła poprzeczna (tnąca)

$$T_z(x, t) = T(x, t) = kGA\gamma(x, t) = kGA \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) = kGA\gamma \quad ; \quad (4.11)$$

- moment zginający (gnący)

$$M_y(x, t) = M(x, t) = -EI\kappa(x, t) = -EI \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) = -EI\kappa, \quad (4.12)$$

gdzie E, G oznaczają kolejno współczynnik sprężystości podłużnej (moduł Younga) i współczynnik sprężystości poprzecznej (moduł Kirchhoffa), A, I – pole przekroju poprzecznego i główny centralny moment bezwładności względem osi y; k jest współczynnikiem ścinania, zależnym od kształtu przekroju poprzecznego (przyjęto dla przekroju prostokątnego  $k = \frac{5}{6}$ ). Wartość współczynnika k jest w literaturze podawana różnie. Według Funga [Fung 1965] wartość k powinna wynosić  $k = \frac{2}{3}$ , inny sposób wyznaczania współczynnika podaje Mindlin -  $k = \frac{\pi^2}{12}$  [Mindlin 1951] i Reissner [Reissner 1947] i wtedy  $k = \frac{5}{6}$ .



Rys. 4.4. Oznaczenie deformacji (zmiana postaci spowodowana siłą poprzeczną i momentem zginającym) [opracowanie własne]

#### 4.6. WARUNKI BRZEGOWE I POCZĄTKOWE

Równania (4.2 ÷ 4.13) wraz z warunkami brzegowymi i początkowymi opisują problem początkowo – brzegowy stateczności pręta. Aby rozwiązanie powyższych równań było jednoznaczne, potrzebne są warunki brzegowe i początkowe. Warunki brzegowe zależą od schematu statycznego rozpatrywanego pręta.

*Model numeryczny wyboczenia dynamicznego prętów z wykorzystaniem metody elementów skończonych*

Natomiast warunków początkowych w tym przypadku mamy sześć (trzy równania równowagi drugiego rzędu względem czasu):

$$\begin{aligned}
 u(x, t_0) &= u(x, 0) = u_0(x); \\
 \dot{u}(x, t_0) &= \dot{u}(x, 0) = \dot{u}_0(x); \\
 w(x, t_0) &= w(x, 0) = w_0(x); \\
 \dot{w}(x, t_0) &= \dot{w}(x, 0) = \dot{w}_0(x); \\
 \Psi(x, t_0) &= \Psi(x, 0) = \Psi_0(x); \\
 \dot{\Psi}(x, t_0) &= \dot{\Psi}(x, 0) = \dot{\Psi}_0(x).
 \end{aligned}
 \tag{4.13}$$

Istnieje ogólny dowód na to, że przedstawiony zestaw równań różniczkowych cząstkowych ma następującą charakterystykę [Nowacki 1972]:

- istnieje rozwiązanie,
- rozwiązanie jest jednoznaczne.

#### 4.7. RÓWNANIE PRACY WIRTUALNEJ

Równania geometryczne (4.7 ÷ 4.9), równania fizyczne (4.10 ÷ 4.12), równania równowagi (4.6), warunki brzegowe i początkowe stanowią lokalne sformułowanie zagadnienia początkowo – brzegowego. Zastosowanie metody elementów skończonych (MES) wymaga globalnego (całkowego) sformułowania tego zagadnienia. Zwykle polega to na takim wprowadzeniu zasad wariacyjnych, że najpierw buduje się pewien funkcjonał, a następnie żąda się, aby spełniał on odpowiednie warunki minimum. Można jednak ominąć etap budowania funkcjonału i zastosować, np. zasadę pracy wirtualnej [Fung 1965; Nowacki 1972]. Wszystkie wielkości występujące w równaniach (4.2 ÷ 4.13) są funkcjami klasy  $H^{M,N}(M, N > 2)$ . Wariację funkcji  $f(x, t)$  (w szczególności  $u, w, \psi$ ) oznaczamy symbolami  $\delta f$ . Rozważamy klasę dowolnych przemieszczeń  $f + \delta f$  zgodnych z więzami rozważanego ciała (ośrodka), np. belki. Podstawą do sformułowania całkowego są równania równowagi (4.6).

Każde z równań (4.6) mnożymy przez odpowiednią wariację przemieszczeń  $\delta u, \delta w$  oraz  $\delta \psi$  i całkujemy po długości pręta:

$$\begin{aligned}
 \int_0^l \delta u \left[ \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} (T\psi) - \rho A \ddot{u} \right] dx &= 0 \\
 \int_0^l \delta w \left[ \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (N\psi) - \rho A \ddot{w} \right] dx &= 0 \\
 \int_0^l \delta \psi \left[ -\frac{\partial M}{\partial x} + T + N \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) - \rho I \ddot{\psi} \right] dx &= 0
 \end{aligned}
 \tag{4.14}$$



Wariacje przemieszczeń (przemieszczenia wirtualne) są funkcjami dowolnymi, ale spełniającymi warunki brzegowe (są kinematycznie dopuszczalne, są zupełne).

Równania (4.14) przekształca się wykonując całkowanie przez części. Po wykonaniu takiego całkowania otrzymamy:

$$\begin{aligned}
 & \left[ - \int_0^l \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} N dx + \delta u N|_0^l \right] + \int_0^l \left[ \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} T \psi dx - \delta u T \psi|_0^l \right] - \\
 & \quad - \int_0^l \delta u \rho A \ddot{u} dx = 0; \\
 & \left[ - \int_0^l \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} T dx + \delta w T|_0^l \right] - \int_0^l \left[ \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} N \psi dx + \delta w N \psi|_0^l \right] - \\
 & \quad - \int_0^l \delta w \rho A \ddot{w} dx = 0 \tag{4.15} \\
 & \left[ \int_0^l \frac{\partial(\delta \psi)}{\partial x} M dx - \delta \psi M|_0^l \right] + \int_0^l \delta \psi T dx + \int_0^l \delta \psi N \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) dx - \\
 & \quad - \int_0^l \delta \psi \rho I \ddot{\psi} dx = 0
 \end{aligned}$$

Wracając do rozpatrywanego przypadku (rys. 4.2) mamy następujące warunki brzegowe i przynależne wariacje przemieszczeń:

$$N(x=0)=N_A \neq 0, u(x=0)=u_A=0, \text{ to oznacza } \delta u(x=0)=\delta u_A=0$$

$$N(x=l)=N_B=-P(t), u(x=l)=u_B \neq 0, \text{ to oznacza } \delta u(x=l) = \delta u_B \neq 0$$

$$T(x=0)=T_A \neq 0, w(x=0)=w_A=0, \text{ to oznacza } \delta w(x=0) = \delta w_A = 0$$

$$T(x=l)=T_B \neq 0, w(x=l)=w_B=0, \text{ to oznacza } \delta w(x=l) = \delta w_B = 0 \tag{4.16}$$

$$M(x=0)=M_A=0, \psi(x=0)=\psi_A \neq 0, \text{ to oznacza } \delta \psi(x=0) = \delta \psi_A \neq 0$$

$$M(x=l)=M_B=0, \psi(x=l)=\psi_B \neq 0, \text{ to oznacza } \delta \psi(x=l) = \delta \psi_B \neq 0$$

Biorąc pod uwagę warunki (4.16), równania (4.15) przyjmą postać:

$$\begin{aligned} & \int_0^l \left[ \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} (N-T\psi) + \delta u \rho A \ddot{u} \right] dx + \int_0^l \left[ \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} (T+N\psi) + \delta w \rho A \ddot{w} \right] dx + \\ & + \int_0^l \left\{ -\frac{\partial(\delta \psi)}{\partial x} M + \delta \psi \left[ -T - N \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) \right] + \delta \psi \rho I \ddot{\psi} \right\} dx + \\ & + [\delta u(-N + T\psi)]_0^l + \delta w(-T - N\psi)|_0^l + \delta \psi M|_0^l = 0 \quad (4.17) \end{aligned}$$

Dokonując odpowiedniego pogrupowania otrzymujemy:

$$\begin{aligned} & \int_0^l \left\{ \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} (N - T\psi) + \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} (T + N\psi) - \right. \\ & \left. - \frac{\partial(\delta \psi)}{\partial x} M + \delta \psi \left[ -T - N \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) \right] + \right. \\ & \left. + \delta u \rho A \ddot{u} + \delta w \rho A \ddot{w} + \delta \psi \rho I \ddot{\psi} \right\} dx + [\delta u(-N+T\psi)]_0^l + \\ & + \delta w(-T - N\psi)|_0^l + \delta \psi M|_0^l = 0 \quad (4.18) \end{aligned}$$

Poszczególne wielkości powyższych równań (4.15) i (4.17) wyrażone są w  $J = N \cdot m$ . Równania (4.16), (4.17) i (4.18) nazywamy zasadą (równaniami) pracy wirtualnej, która brzmi: suma pracy wirtualnej wykonanej przez siły wewnętrzne (siły przekrojowe  $N$ ,  $T$ ,  $M$ ) oraz przez siły zewnętrzne (w rozpatrywanym przypadku przez siłę  $P$ ) i siły bezwładności na przemieszczeniach wirtualnych  $\delta u$ ,  $\delta w$  i  $\delta \psi$ , spełniających geometryczne (przemieszczeniowe) warunki brzegowe, jest równa zero.

Wprowadzamy następujące oznaczenia:

$$T = \frac{\rho}{2} \int_0^l [A(\dot{u} \dot{u} + \dot{w} \dot{w}) + I \dot{\psi} \dot{\psi}] dx;$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ \frac{\partial u}{\partial x} (N - T\psi) + \frac{\partial w}{\partial x} (T + N\psi) - \frac{\partial \psi}{\partial x} M \right] - \psi \left[ T + N \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) \right] dx; \quad (4.19)$$

$$W = [u(-N + T\psi) + w(-T - N\psi) + \psi M]_0^l$$

gdzie  $T$  – energia kinetyczna,  $V$  – energia potencjalna,  $W$  – praca sił zewnętrznych.

Wykorzystując powyższe oznaczenia, równanie (4.18) możemy zapisać w postaci

$$\delta\chi(u, w, \psi) = \delta(T + V + W) = 0 \quad (4.20)$$

gdzie  $\chi$  jest minimalizowanym funkcjonałem. Równanie (4.20) przedstawia w istocie podstawowe równanie energetyczne, zasadę Hamiltona [Fung 1965; Nowacki 1972; Bayley 1975; Podhorecki 1989].

Istnieje ogólny dowód na to, że analizowany problem ma jednoznaczne rozwiązanie [Nowacki 1972].

#### 4.8. METODY ROZWIĄZYWANIA ZAGADNIENIA POCZĄTKOWO – BRZEGOWEGO

Ze wszystkich równań (4.2 ÷ 4.13) wynika, że mamy 9 niewiadomych ( $N$ ,  $T$ ,  $M$  – siły przekrojowe;  $\varepsilon$ ,  $\gamma$ ,  $\kappa$  – odkształcenia;  $u$ ,  $w$ ,  $\psi$  – przemieszczenia). Łącznie wszystkich równań mamy również 9 (3 równania statyczne; 3 równania fizyczne; 3 równania geometryczne). Skoro mamy równania różniczkowe cząstkowe, to do ich jednoznacznego rozwiązania potrzebujemy warunków brzegowych i początkowych.

Możliwe są następujące ogólne metody rozwiązywania tego problemu:

- Metoda 1: upraszczamy równania i rozwiązujemy te uproszczone równania w sposób ścisły (z użyciem metod analitycznych, ścisłych);
- Metoda 2: równań nie upraszczamy, ale do ich rozwiązania stosujemy metody przybliżone (np. MES) – metody numeryczne, komputerowe;
- Metoda 3: metoda hybrydowa (mieszana).

Gdybyśmy do rozwiązania równań (4.2 ÷ 4.13) zastosowali MES, to równania różniczkowe cząstkowe zamieniły się w układ sprzężonych równań różniczkowych zwyczajnych zależnych od czasu (równania ruchu). Równania ruchu można rozwiązać analitycznie (m.in. przy zastosowaniu metody transformacji własnej) lub numerycznie (np. stosując metodę Newmarka, SSPj, MRS). W niniejszej pracy zastosowana zostanie MES i metoda Newmarka. Należy mieć na względzie to, że mamy w rozpatrywanym przypadku do czynienia z równaniami nieliniowymi.

## 5. RÓWNANIA RUCHU W METODZIE ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

### 5.1. OPIS ELEMENTU SKOŃCZONEGO

Podstawą do sformułowania równań ruchu w MES jest równanie pracy wirtualnej (4.18), równania geometryczne (4.7 ÷ 4.9), równania fizyczne (4.10 ÷ 4.12), warunki brzegowe (przemieszczeniowe) i warunki początkowe (4.13). Przyjmujemy, że podstawowymi niewiadomymi są funkcje przemieszczeń  $u$ ,  $w$ ,  $\psi$ , stąd stosować będziemy MES w wersji metody przemieszczeń. Taki wybór powoduje, że wszystkie funkcje występujące w wymienionych równaniach opisujemy przemieszczeniami węzłowymi elementu skończonego (ES).

Pręt dzielimy (dyskretyzujemy) na elementy skończone (ES) (rys. 5.1).

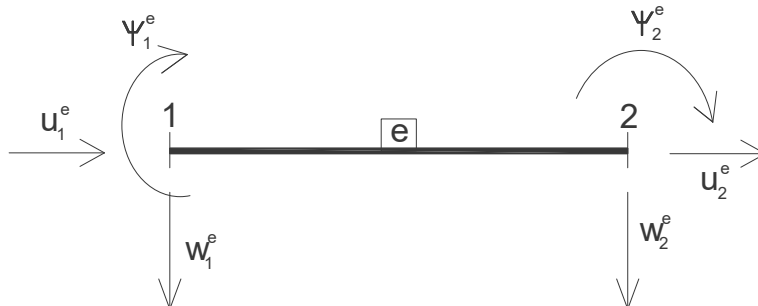


$$e = 1, 2, \dots, E^* \text{ - numery ES}$$

$$E^* \text{ - liczba ES}$$

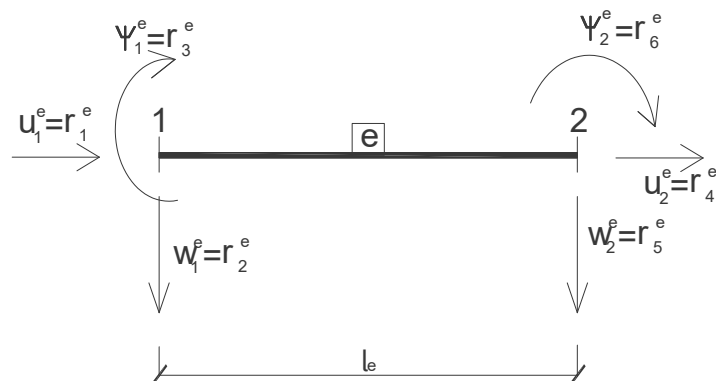
Rys. 5.1. Dyskretyzacja pręta

Rozważany pręt ma trzy stopnie swobody  $u = u(x, t)$ ,  $w = w(x, t)$ ,  $\psi = \psi(x, t)$ , co znaczy, że każdy element skończony ma też trzy stopnie swobody, tj.  $u^e = u^e(x, t)$ ,  $w^e = w^e(x, t)$ ,  $\psi^e = \psi^e(x, t)$ . W elemencie skończonym (ES) „e”, w każdym węźle mamy po trzy stopnie swobody, tzn.  $u_1^e = u_1^e(t)$ ,  $w_1^e = w_1^e(t)$ ,  $\psi_1^e = \psi_1^e(t)$  oraz  $u_2^e = u_2^e(t)$ ,  $w_2^e = w_2^e(t)$ ,  $\psi_2^e = \psi_2^e(t)$  (rys. 5.2).



Rys. 5.2. Element skończony (ES) o dwóch węzłach i 6 przemieszczeniach węzłowych

Wygodnie jest opisać przemieszczenia węzłowe ES jednorodnymi oznaczeniami, np.  $r_i^e = r_i^e(t)$  (rys. 5.3).



Rys. 5.3. Oznaczenie przemieszczeń węzłowych w MES

Poszczególne funkcje występujące w równaniu pracy wirtualnej (4.20) należy opisać przemieszczeniami węzłowymi  $r_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ):

➤ Opis funkcji przemieszczeń:

$$\begin{aligned} u^e(x, t) &= \Phi_i^{eu}(x) \cdot r_i^e(t) \\ w^e(x, t) &= \Phi_i^{ew}(x) \cdot r_i^e(t) \\ \psi^e(x, t) &= \Phi_i^{e\psi}(x) \cdot r_i^e(t) \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$i=1, 2, \dots, 6$$

gdzie  $\Phi_i^e$  jest funkcją kształtu ES. Z zapisu (5.1) wynika, że poszczególne funkcje przemieszczeń można opisywać innymi funkcjami kształtu.

➤ Opis funkcji odkształceń:

- odkształcenia liniowe, podłużne

$$\begin{aligned} \varepsilon^e(x, t) &= \frac{\partial u^e}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial w^e}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial w_0^e}{\partial x} \right)^2 \right] = \\ &= \left( \frac{\partial \Phi_i^{eu}}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_i^{ew}}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j^{ew}}{\partial x} r_j^e \right) r_i^e - \left( \frac{\partial w_0^e}{\partial x} \right)^2 \end{aligned} \tag{5.2}$$

- odkształcenia postaciowe

$$\gamma^e(x, t) = \frac{\partial w^e}{\partial x} - \psi^e = \left( \frac{\partial \Phi_i^{ew}}{\partial x} - \Phi_i^{e\psi} \right) r_i^e \quad (5.3)$$

- krzywizna

$$\kappa^e(x, t) = \frac{\partial \psi^e}{\partial x} - \frac{\partial^2 w_0^e}{\partial x^2} = \frac{\partial \Phi_i^{e\psi}}{\partial x} r_i^e - \frac{\partial^2 w_0^e}{\partial x^2} \quad (5.4)$$

➤ Opis funkcji sił przekrojowych:

- siła podłużna

$$N^e(x, t) = E^e A^e \varepsilon^e = E^e A^e \left( \frac{\partial \Phi_i^{eu}}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_i^{ew}}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j^{ew}}{\partial x} r_j^e \right) r_i^e - E^e A^e \left( \frac{\partial w_0^e}{\partial x} \right)^2 \quad (5.5)$$

- siła poprzeczna

$$T^e(x, t) = k^e G^e A^e \gamma^e = k^e G^e A^e \left( \frac{\partial \Phi_i^{ew}}{\partial x} - \Phi_i^{e\psi} \right) r_i^e \quad (5.6)$$

- moment zginający

$$M^e(x, t) = -E^e I^e \kappa^e = -E^e I^e \frac{\partial \Phi_i^{e\psi}}{\partial x} r_i^e - M_0 \quad (5.7)$$

## 5.2. RÓWNANIA RUCHU W MES

Do równania pracy wirtualnej (4.18) zapisanego dla ES „e” wstawimy równania (5.1) ÷ (5.7) otrzymując:

$$\begin{aligned}
& \int_{le} \frac{\partial \Phi_i^{eu}}{\partial x} \delta r_i^e E^e A^e \left[ \left( \frac{\partial \Phi_j^{eu}}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_j^{ew}}{\partial x} \frac{\partial \Phi_k^{ew}}{\partial x} r_k^e \right) r_j^e - \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right] dx - \\
& - \int_{le} \frac{\partial \Phi_i^{eu}}{\partial x} \delta r_i^e k^e G^e A^e \left( \frac{\partial \Phi_j^{ew}}{\partial x} - \Phi_j^{e\psi} \right) \cdot r_j^e \Phi_k^{e\psi} r_k^e dx + \\
& + \int_{le} \frac{\partial \Phi_i^{ew}}{\partial x} \delta r_i^e k^e G^e A^e \left( \frac{\partial \Phi_j^{ew}}{\partial x} - \Phi_j^{e\psi} \right) \cdot r_j^e dx + \\
& + \int_{le} \frac{\partial \Phi_i^{ew}}{\partial x} E^e A^e \left[ \left( \frac{\partial \Phi_j^{eu}}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_j^{ew}}{\partial x} \frac{\partial \Phi_k^{ew}}{\partial x} r_k^e \right) \cdot r_j^e - \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right] \Phi_l^{e\psi} r_l^e dx - \\
& - \int_{le} \frac{\partial \Phi_i^{e\psi}}{\partial x} \delta r_i^e \left[ \left( -E^e I^e \frac{\partial \Phi_j^{e\psi}}{\partial x} r_j^e \right) - M_0^e \right] dx + \quad (5.8) \\
& + \int_{le} \Phi_i^{e\psi} \delta r_i^e \left[ -k^e G^e A^e \left( \frac{\partial \Phi_j^{ew}}{\partial x} - \Phi_j^{e\psi} \right) \right] r_j^e dx + \\
& - \int_{le} \Phi_i^{e\psi} \delta r_i^e E^e A^e \left[ \left( \frac{\partial \Phi_j^{eu}}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_j^{ew}}{\partial x} \frac{\partial \Phi_k^{ew}}{\partial x} r_k^e \right) r_j^e - \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right] \cdot \\
& \cdot \left( \frac{\partial \Phi_l^{ew}}{\partial x} - \Phi_l^{e\psi} \right) r_l^e dx + \int_{le} (\Phi_i^{eu} \delta r_i^e \rho^e A^e \Phi_j^{eu} \ddot{r}_j^e + \Phi_i^{ew} \delta r_i^e \rho^e A^e \Phi_j^{ew} \ddot{r}_j^e + \\
& + \Phi_i^{e\psi} \delta r_i^e \rho^e I^e \Phi_j^{e\psi} \ddot{r}_j^e) dx + [\Phi_i^{eu} (-N + T\psi) + \\
& + \Phi_i^{ew} (-T - N\psi) + \Phi_i^{e\psi} M] \delta r_i^e |_{l_e^k} = 0
\end{aligned}$$

Następnie równanie (5.8) odpowiednio grupujemy i otrzymujemy następującą postać:

$$\begin{aligned}
& \delta r_i^e \left[ \int_{l_e} (\Phi_i^{eu} \rho^e A^e \Phi_j^{eu} + \Phi_i^{ew} \rho^e A^e \Phi_j^{ew} + \Phi_i^{e\psi} \rho^e I^e \Phi_j^{e\psi}) dx \right] \ddot{r}_j^e + \\
& + \delta r_i^e \left\{ \int_{l_e} \left[ \frac{\partial \Phi_i^{eu}}{\partial x} E^e A^e \frac{\partial \Phi_j^{eu}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_i^{ew}}{\partial x} k^e G^e A^e \left( \frac{\partial \Phi_j^{ew}}{\partial x} - \Phi_j^{e\psi} \right) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\partial \Phi_i^{e\psi}}{\partial x} E^e I^e \frac{\partial \Phi_j^{e\psi}}{\partial x} - \Phi_i^{e\psi} k^e G^e A^e \left( \frac{\partial \Phi_j^{ew}}{\partial x} - \Phi_j^{e\psi} \right) \right] dx \right\} r_j^e + \\
& + \delta r_i^e \left\{ \int_{l_e} \left[ \frac{\partial \Phi_i^{eu}}{\partial x} E^e A^e \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_j^{ew}}{\partial x} \frac{\partial \Phi_k^{ew}}{\partial x} r_k^e - \frac{\partial \Phi_i^{eu}}{\partial x} k^e G^e A^e \left( \frac{\partial \Phi_j^{ew}}{\partial x} - \Phi_j^{e\psi} \right) \cdot \right. \right. \\
& \quad \cdot \Phi_k^{e\psi} r_k^e + \frac{\partial \Phi_i^{ew}}{\partial x} E^e A^e \frac{\partial \Phi_j^{eu}}{\partial x} \Phi_l^{e\psi} r_l^e + \\
& \quad \left. \left. - \Phi_l^{e\psi} E^e A^e \frac{\partial \Phi_j^{eu}}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi_l^{ew}}{\partial x} - \Phi_l^{e\psi} \right) r_l^e \right] dx \right\} r_j^e + \quad (5.9) \\
& + \delta r_i^e \left\{ \int_{l_e} \left[ \frac{\partial \Phi_i^{ew}}{\partial x} E^e A^e \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_j^{ew}}{\partial x} \frac{\partial \Phi_k^{ew}}{\partial x} r_k^e \Phi_l^{e\psi} r_l^e + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \Phi_i^{e\psi} E^e A^e \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_j^{ew}}{\partial x} \frac{\partial \Phi_k^{ew}}{\partial x} r_k^e \left( \frac{\partial \Phi_l^{ew}}{\partial x} - \Phi_l^{e\psi} \right) r_l^e \right] dx \right\} r_j^e + \\
& + \delta r_i^e \int_{l_e} \left[ - \frac{\partial \Phi_i^{eu}}{\partial x} E^e A^e \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \Phi_i^{e\psi}}{\partial x} M_0^e - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial \Phi_i^{ew}}{\partial x} E^e A^e \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \Phi_l^{e\psi} r_l^e - \right. \\
& \quad \left. + \Phi_i^{e\psi} E^e A^e \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\partial \Phi_l^{ew}}{\partial x} - \Phi_l^{e\psi} \right) r_l^e \right] dx + \\
& + \delta r_i^e \left[ \Phi_i^{eu} (-N + T\psi) + \Phi_i^{ew} (-T - N\psi) + \Phi_i^{e\psi} M \right]_{l_e^p}^{l_e^k} = 0
\end{aligned}$$



Do dalszych analiz wprowadzamy następujące oznaczenia:

➤  ${}^L K_{ij}^e$  - liniowa macierz sztywności ES

$${}^L K_{ij}^e = \int_{le} \left[ \frac{\partial \Phi_i^{eu}}{\partial x} E^e A^e \frac{\partial \Phi_j^{eu}}{\partial x} + \left( \frac{\partial \Phi_i^{ew}}{\partial x} - \Phi_i^{e\psi} \right) k^e G^e A^e \left( \frac{\partial \Phi_j^{ew}}{\partial x} - \Phi_j^{e\psi} \right) + \frac{\partial \Phi_i^{e\psi}}{\partial x} E^e I^e \frac{\partial \Phi_j^{e\psi}}{\partial x} \right] dx \quad (5.10)$$

➤  ${}^N K_{ij}^e(\mathbf{r})$  – pierwsza nieliniowa macierz sztywności ES

$${}^N K_{ij}^e(\mathbf{r}) = \int_{le} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_i^{eu}}{\partial x} E^e A^e \frac{\partial \Phi_j^{ew}}{\partial x} \frac{\partial \Phi_k^{ew}}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_i^{eu}}{\partial x} k^e G^e A^e \left( \frac{\partial \Phi_j^{ew}}{\partial x} - \Phi_j^{e\psi} \right) \Phi_k^{e\psi} + \frac{\partial \Phi_i^{ew}}{\partial x} E^e A^e \frac{\partial \Phi_j^{eu}}{\partial x} \Phi_k^{e\psi} - \Phi_i^{e\psi} E^e A^e \frac{\partial \Phi_j^{eu}}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi_k^{ew}}{\partial x} - \Phi_k^{e\psi} \right) \right] r_k^e dx \quad (5.11)$$

➤  ${}^{NN} K_{ij}^e(\mathbf{r})$  – druga nieliniowa macierz sztywności ES

$${}^{NN} K_{ij}^e(\mathbf{r}) = \int_{le} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_i^{ew}}{\partial x} E^e A^e \frac{\partial \Phi_j^{ew}}{\partial x} \frac{\partial \Phi_k^{ew}}{\partial x} \Phi_l^{e\psi} - \frac{1}{2} \Phi_i^{e\psi} E^e A^e \frac{\partial \Phi_j^{ew}}{\partial x} \frac{\partial \Phi_k^{ew}}{\partial x} \cdot \left( \frac{\partial \Phi_l^{ew}}{\partial x} - \Phi_l^{e\psi} \right) r_k^e r_l^e \right] dx \quad (5.12)$$

➤  $M_{ij}^e$  – macierz bezwładności mas

$$M_{ij}^e = \int_{le} \left( \Phi_i^{eu} \rho^e A^e \Phi_j^{eu} + \Phi_i^{ew} \rho^e A^e \Phi_j^{ew} + \Phi_i^{e\psi} \rho^e I^e \Phi_j^{e\psi} \right) dx \quad (5.13)$$

➤  ${}^L F_i^e$  – liniowa część siły wymuszającej

$${}^L F_i^e = \int_{le} \left[ -\frac{\partial \Phi_i^{eu}}{\partial x} E^e A^e \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial \Phi_i^{e\psi}}{\partial x} E^e I^e \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right] dx + \left[ \Phi_i^{eu} (-N + T\psi) - \Phi_i^{ew} (T + N\psi) + \Phi_i^{e\psi} M \right]_0^{le} \quad (5.14)$$

➤  ${}^N F_i^e(\mathbf{r})$  – nieliniowa część siły wymuszającej

$${}^N F_i^e(\mathbf{r}) = \int_{le} E^e A^e \left[ -\frac{\partial \Phi_i^{ew}}{\partial x} \Phi_k^{e\psi} + \Phi_i^{e\psi} \left( \frac{\partial \Phi_k^{ew}}{\partial x} - \Phi_k^{e\psi} \right) \right] \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 r_k^e dx \quad (5.15)$$

Po wprowadzeniu powyższych oznaczeń do równania (5.9) otrzymujemy:

$$\delta r_i^e \left[ M_{ij}^e \ddot{r}_j^e + ({}^L K_{ij}^e + {}^N K_{ij}^e + {}^{NN} K_{ij}^e) r_j^e + ({}^L F_i^e + {}^N F_i^e) \right] = 0 \quad (5.16)$$

Równanie (5.9) musi być spełnione dla każdego  $\delta r_i^e$  (gdyż  $\delta r_i \neq 0$ ), stąd otrzymujemy:

$$M_{ij}^e \ddot{r}_j^e + {}^L K_{ij}^e r_j^e + [({}^N K_{ij}^e + {}^{NN} K_{ij}^e) r_j^e + ({}^L F_i^e + {}^N F_i^e)] = 0 \quad (5.17)$$

$i, j = 1, 2, \dots, 6.$

Dokonując agregacji (globalizacji) po wszystkich ES, równanie (5.9) przyjmuje następującą postać:

$$\sum_e \{ M_{ij}^e \ddot{r}_j^e + {}^L K_{ij}^e r_j^e + [({}^N K_{ij}^e + {}^{NN} K_{ij}^e) r_j^e + ({}^L F_i^e + {}^N F_i^e)] \} = 0 \quad (5.18)$$

Równanie (5.18) można zapisać macierzowo:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{r}}(t) + [{}^L \mathbf{K} + {}^N \mathbf{K}(\mathbf{r}) + {}^{NN} \mathbf{K}(\mathbf{r})] \mathbf{r}(t) + {}^L \mathbf{F}(t) + {}^N \mathbf{F}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (5.19)$$

Do jednoznacznego rozwiązania tego równania różniczkowego potrzebne są dwa warunki początkowe  $\mathbf{r}(t = 0) = \mathbf{r}_0$ ,  $\dot{\mathbf{r}}(t = 0) = \dot{\mathbf{r}}_0$ .

Każda z wymienionych wyżej wielkości, tj.  ${}^L\mathbf{K}$ ,  ${}^N\mathbf{K}(\mathbf{r})$ ,  ${}^{NN}\mathbf{K}(\mathbf{r})$  i  $\mathbf{M}$  mogą być funkcją czasu. Zwykle rozważane zjawiska mają taką właściwość, że macierz  $\mathbf{M}$  i  $\mathbf{K}$  nie zależą od czasu, tzn. że np. cechy materiałowe są niezmiennie w czasie. Funkcjami czasu są natomiast wielkości  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  oraz  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(t)$ .

Równanie (5.19), to w istocie układ równań różniczkowych zwyczajnych sprzężonych, niejednorodnych ze zmiennymi współczynnikami  ${}^N\mathbf{K}(\mathbf{r})$ ,  ${}^{NN}\mathbf{K}(\mathbf{r})$  i  ${}^N\mathbf{F}(\mathbf{r})$ , co stwarza specjalny problem. Gdybyśmy mieli do czynienia z równaniem ze stałymi współczynnikami, to taki układ równań miałby postać układu równań różniczkowych zwyczajnych sprzężonych niejednorodnych o stałych współczynnikach

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{r}}(t) + {}^L\mathbf{K}\mathbf{r}(t) + {}^L\mathbf{F}(t) = \mathbf{0} \quad (5.20)$$

Do rozwiązania takiego układu równań (równania ruchu) stosuje się dwa podstawowe sposoby:

- Sposób pośredni polegający na rozwiązaniu równania ruchu w dwóch etapach:
  - etap I – rozprężenie układu równań przy zastosowaniu metody transformacji własnej (metody modalnej),
  - etap II – rozwiązanie pojedynczych, niezależnych równań różniczkowych drugiego rzędu (z użyciem metod ścisłych lub numerycznych).
- Sposób bezpośredni polegający na rozwiązaniu równania ruchu z użyciem metod numerycznych (komputerowych), tzw. metod bezpośredniego całkowania równań ruchu.

Oryginalnym sposobem rozwiązania zagadnienia początkowo-brzegowego jest zastosowanie metody elementów czasoprzestrzennych (MECZ) prowadzącej wprost do równań algebraicznych [Kączkowski 1976; Podhorecki 1989].

Do rozwiązania układu równań (5.19) można zastosować następujące postępowanie:

- Wszystkie macierze zależne od przemieszczeń  $\mathbf{r}$  grupujemy z kolumną zawierającą wolne wyrazy

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}}(t) + {}^L\mathbf{K}\mathbf{r}(t) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0}, \quad (5.21)$$

gdzie

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = [{}^N\mathbf{K}(\mathbf{r}, t) + {}^{NN}\mathbf{K}(\mathbf{r}, t)]\mathbf{r} + {}^L\mathbf{F}(t) + {}^N\mathbf{F}(\mathbf{r}, t). \quad (5.22)$$

W ten sposób otrzymujemy układ równań podobny do problemu liniowego opisanego równaniem (5.20). Istotna różnica polega na tym, że w równaniu (5.20) wolny wyraz  ${}^L\mathbf{F}(t)$  nie zależy od przemieszczeń, natomiast w równaniu (5.21) wolny wyraz  $\mathbf{P}(\mathbf{r})$  zależy od nieznanymi przemieszczeń węzłowych  $\mathbf{r}$ .

- Do rozwiązania równania (5.22) można zastosować dowolną metodę bezpośredniego całkowania równań ruchu prowadzącą do procedury rekurencyjnej (np. metodę Newmarka) i iterację w każdym kroku rekurencyjnym. Problem prowadzenia iteracji należy rozpatrywać w toku walidacji modelu obliczeniowego, tj. warto przeanalizować następujące problemy:
  - przy zagadnieniu statycznym (zagadnieniu brzegowym) sprawdzić wpływ drugiej nieliniowej macierzy sztywności  ${}^{NN}\mathbf{K}(\mathbf{r})$  na wynik obliczeń, być może będzie można pomijać tę macierz w toku obliczeń;
  - przy zagadnieniu dynamicznym (zagadnieniu początkowo – brzegowym), krok całkowania jest z natury bardzo mały (gdyż mamy do czynienia z równaniem falowym), co może oznaczać, że w kolejnych krokach czasowych nie trzeba będzie stosować iteracji.

### 5.3. KLASYFIKACJA METOD NUMERYCZNYCH DO BEZPOŚREDNIEGO ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ RUCHU

#### 5.3.1 Wprowadzenie

Macierzowe równania ruchu składające się ze sprzężonych różniczkowych zwyczajnych równań można rozwiązać bezpośrednio. W tym celu stosuje się metody numeryczne, tzw. metody bezpośredniego całkowania równań ruchu. Istnieje wiele takich metod (o czym poniżej), ale wszystkie te metody polegają na zamianie równań różniczkowych na liczne równania algebraiczne. Ogólna zasada jest taka, że im tych równań algebraicznych jest więcej, tym metoda numeryczna jest dokładniejsza. Poza tym, niezależnie od stosowanej metody numerycznej, przy znanych warunkach początkowych, obliczenia sprowadzają się zawsze do procesu rekurencyjnego, czyli do obliczeń „*krok po kroku*” („*step by step*”).

Równania ruchu rozwiązywać możemy bezpośrednio przy wykorzystaniu następujących głównych metod numerycznych [Rakowski 1992; Rakowski i Kacprzyk 1993]:

- metoda różnic skończonych (MRS) [Rakowski 1992; Podhorecki i Przedpełski 1982],
- metoda Newmarka [Newmark 1959, Rakowski i Kacprzyk 1993; Zienkiewicz 1977;],

- metoda Houbolta [Rakowski i Kacprzyk 1993; Houbolt 1950],
- metoda Wilsona [Zienkiewicz 1977; Rakowski i Kacprzyk 1993],
- metoda Zienkiewicza-Wooda (SSpj) [Zienkiewicz i in. 1984; Podhorecki 1997].

W praktycznych zastosowaniach dominuje metoda Newmarka oraz metoda Zienkiewicza-Wooda.

Trzeba jednak zwrócić uwagę na to, że wymienione metody stosuje się zwykle do rozwiązywania układu równań różniczkowych typu (5.20), czyli do rozwiązywania równań ruchu kiedy współczynniki poszczególnych macierzy  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{F}$  nie zależą od przemieszczeń  $\mathbf{r}$ . Analizowane w niniejszej pracy równanie (5.19) zawiera macierze z wyrazami zależnymi od przemieszczeń  $\mathbf{r}$ , zatem w ogólności należy zauważyć, że w każdym kroku rekurencyjnym potrzebna będzie iteracja, celem uzyskania możliwie dokładnego rozwiązania.

### 5.3.2 Metoda różnic skończonych

W metodzie różnic skończonych (MRS) poszukiwaną funkcję  $r = r(t)$  obliczamy w dyskretyzacyjnych punktach na osi czasu  $0, 1, 2, \dots, i, \dots, T$ , czyli czasów  $t_0, t_1, \dots, t_i, \dots, t_T$ . Odległość pomiędzy poszczególnymi punktami nazywamy najczęściej krokiem całkowania

$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i \quad (5.23)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, T$$

Krok całkowania może być zmienny w kolejnych chwilach. W dalszej części rozważań przyjmujemy zwykle, że krok całkowania jest stały, tzn.

$$\Delta t_i = \Delta t = \text{const} \quad (5.24)$$

Do wyprowadzenia efektywnych procedur obliczeniowych stosujemy zwykle centralne różnice skończone (RS) [Rakowski 1992; Podhorecki i Przedpełski 1982]:

- I Różnica skończona

$$\dot{r}_i = \frac{-r_{i-1} + r_{i+1}}{2\Delta t} \quad (5.25)$$

- II Różnica Skończona

$$\ddot{r}_i = \frac{r_{i-1} - 2r_i + r_{i+1}}{\Delta t^2} \quad (5.26)$$

Równanie (5.23) zapisujemy dla chwili  $i = 0$ :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{r}}_i + \mathbf{K} \mathbf{r}_i + \mathbf{P}_i = 0 \quad (5.27)$$

przyjmując, że macierz  $\mathbf{M}$  oraz  $\mathbf{K}$  nie zmieniają się w czasie. Do tego równania wstawiamy II RS (5.26)

$$\mathbf{M} \frac{\mathbf{r}_{i-1} - 2\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_{i+1}}{\Delta t^2} + \mathbf{K} \mathbf{r}_i + \mathbf{P}_i = 0 \quad (5.28)$$

z którego wyznaczamy przemieszczenie w chwili " $i + 1$ "

$$\mathbf{r}_{i+1} = -\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M}^{-1} \left[ \mathbf{P}_i + \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} \mathbf{r}_{i-1} + \left( \mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right) \mathbf{r}_i \right] \quad (5.29)$$

$i = 0, 1, 2, \dots$  - punkty na osi czasu

Wzór (5.29) nazywamy wzorem rekurencyjnym, gdyż na podstawie przemieszczeń w chwilach poprzednich, tzn. w chwilach „ $i$ ” oraz „ $i-1$ ” wyznaczmy przemieszczenie w chwili „ $i+1$ ”.

Algorytm obliczeń z użyciem MRS przebiega następująco:

1. Procedura startowa

- z równania (5.27) wyznaczamy przyspieszenie w chwili początkowej  $\ddot{\mathbf{r}}_0$

$$\ddot{\mathbf{r}}_0 = -\mathbf{M}^{-1} [\mathbf{K} \mathbf{r}_0 + \mathbf{P}_0] \quad (5.30)$$

gdzie

$\mathbf{r}_0$  – dany wektor przemieszczenia w chwili  $i=0$ ,

$\mathbf{P}_0$  – dany wektor obciążenia w chwili  $i=0$ .

Z I RS zapisanej dla  $i=0$  mamy (5.25)

$$\dot{\mathbf{r}}_0 = \frac{-\mathbf{r}_{-1} + \mathbf{r}_1}{2\Delta t} \quad (5.31)$$

z zależności tej wyznaczamy wektor przemieszczeń w chwili „ $i=-1$ ”

$$\mathbf{r}_{-1} = -2\Delta t \dot{\mathbf{r}}_0 + \mathbf{r}_1 \quad (5.32)$$

gdzie

$\dot{\mathbf{r}}_0$  – dany wektor prędkości w chwili  $i=0$

➤ równanie (5.29) zapisujemy dla  $i=0$

$$\mathbf{r}_1 = -\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M}^{-1} \left[ \mathbf{P}_0 + \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} \mathbf{r}_{-1} + \left( \mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right) \mathbf{r}_0 \right] \quad (5.33)$$

po wstawieniu zależności (5.32) otrzymujemy ostateczny wzór na obliczenie wektora przemieszczeń w chwili „ $i=l$ ”.

$$\mathbf{r}_1 = \left( \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right)^{-1} \left[ \frac{2\Delta t}{\Delta t^2} \mathbf{M} \dot{\mathbf{r}}_0 - \left( \mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right) \mathbf{r}_0 - \mathbf{P}_0 \right] \quad (5.34)$$

Procedura startowa kończy się zatem obliczeniem następujących wektorów:  $\mathbf{r}_1$  według (5.34) oraz  $\dot{\mathbf{r}}_0$  według (5.30).

## 2. Procedura rekurencyjna

➤  $i=1$

- ze wzoru (5.29) obliczamy  $\mathbf{r}_2$

$$\mathbf{r}_2 = -\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M}^{-1} \left[ \mathbf{P}_1 + \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} \mathbf{r}_0 + \left( \mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right) \mathbf{r}_1 \right] \quad (5.35)$$

- ze wzoru (5.25)

$$\dot{\mathbf{r}}_{i-1} = \frac{-\mathbf{r}_{i-2} + \mathbf{r}_i}{2\Delta t} \quad (5.36)$$

obliczamy  $\dot{\mathbf{r}}_0$ , które pokryje się z wykorzystanym warunkiem początkowym

- ze wzoru (5.30)

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = -\mathbf{M}^{-1} [\mathbf{K} \mathbf{r}_1 + \mathbf{P}_1] \quad (5.37)$$

➤  $i=2$

- ze wzoru (5.29) obliczamy  $\mathbf{r}_3$

$$\mathbf{r}_3 = -\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M}^{-1} \left[ \mathbf{P}_2 + \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} \mathbf{r}_1 + \left( \mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right) \mathbf{r}_2 \right] \quad (5.38)$$

- ze wzoru (5.28)

$$\dot{\mathbf{r}}_{i-1} = \frac{-\mathbf{r}_{i-2} + \mathbf{r}_i}{2\Delta t} \quad (5.36)$$

obliczamy  $\dot{\mathbf{r}}_1$ ,

- ze wzoru (5.30)

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = -\mathbf{M}^{-1}[\mathbf{K} \mathbf{r}_2 + \mathbf{P}_2] \quad (5.39)$$

➤ itd.

Opisana powyżej wersja MRS, tzn. metoda różnic centralnych jest metodą całkowania jawnego, co oznacza, że na podstawie równania ruchu ułożonego dla chwili „i” wyznaczamy przemieszczenia w chwili następnej „i + 1”, tj.  $\mathbf{r}_{i+1}$ . Do dyspozycji mamy obliczone wcześniej przemieszczenia dla chwil „i-1” oraz „i”, czyli  $\mathbf{r}_{i-1}$  i  $\mathbf{r}_i$ . Jawne sformułowanie MRS powoduje, że mamy do czynienia z metodą warunkowo stabilną, co oznacza, że na krok całkowania nałożone jest ograniczenie [Rakowski 1992]

$$0 < \Delta t < \frac{2}{\omega} \quad (5.40)$$

gdzie  $\omega$  jest dominującą częstością drgań własnych, co w istocie zależy od gęstości dyskretyzacji analizowanego ośrodka.

### 5.3.3 Metoda Newmarka

Metoda Newmarka jest metodą całkowania niejawnego. Przyjmuje się, że przemieszczenie i prędkość przemieszczenia w chwili i + 1 opisane są następującymi zależnościami [Newmark 1959; Rakowski i Kacprzyk 1993; Zienkiewicz 1977]:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{i+1} &= \left[ \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \mathbf{M} + \mathbf{K} \right]^{-1} \left\{ \mathbf{M} \left[ \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \mathbf{r}_i + \frac{1}{\alpha \Delta t} \dot{\mathbf{r}}_i + \left( \frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{\mathbf{r}}_i \right] - \mathbf{P}_{i+1} \right\} \\ \dot{\mathbf{r}}_{i+1} &= \frac{\delta}{\alpha \Delta t} (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) + \left( 1 - \frac{\delta}{\alpha} \right) \dot{\mathbf{r}}_i + \Delta t \left( 1 - \frac{\delta}{2\alpha} \right) \ddot{\mathbf{r}}_i \\ \ddot{\mathbf{r}}_{i+1} &= \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \left[ \mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i - \dot{\mathbf{r}}_i \Delta t - \Delta t^2 \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{\mathbf{r}}_i \right] \\ & \quad i = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.41)$$



gdzie  $\delta, \alpha$  są parametrami metody. W przypadku, kiedy mamy do czynienia ze sformułowaniem bezwarunkowo stabilnym, przyjmujemy te parametry następująco:

$$\begin{aligned} \delta &\geq 0,5 \\ \alpha &\geq 0,25(\delta + 0,5)^2 \end{aligned} \quad (5.42)$$

Zwykle przyjmuje się  $\delta = 0,5, \alpha = 0,25$ .

Procedura rekurencyjna, wg metody Newmarka, przebiega następująco:

1. Procedura startowa

➤ znane warunki początkowe  $\begin{cases} \mathbf{r}_0 \\ \dot{\mathbf{r}}_0 \end{cases}$  (5.43)

obliczamy  $\ddot{\mathbf{r}}_0$  dla  $i = 0$  na podstawie równania ruchu zapisanego dla chwili początkowej

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{r}}_0 + \mathbf{K} \mathbf{r}_0 + \mathbf{P}_0 &= 0 \\ \ddot{\mathbf{r}}_0 &= \mathbf{M}^{-1}[-\mathbf{K} \mathbf{r}_0 - \mathbf{P}_0] \end{aligned} \quad (5.44)$$

➤ ze wzorów (5.41) ułożonych dla  $i=0$  obliczamy kolejno

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \left( \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \mathbf{M} + \mathbf{K} \right)^{-1} \left\{ \mathbf{M} \left[ \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \mathbf{r}_0 + \frac{1}{\alpha \Delta t} \dot{\mathbf{r}}_0 + \left( \frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{\mathbf{r}}_0 \right] - \mathbf{P}_1 \right\} \\ \dot{\mathbf{r}}_1 &= \frac{\delta}{\alpha \Delta t} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) + \left( 1 - \frac{\delta}{\alpha} \right) \dot{\mathbf{r}}_0 + \Delta t \left( 1 - \frac{\delta}{2\alpha} \right) \ddot{\mathbf{r}}_0 \\ \ddot{\mathbf{r}}_1 &= \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \left[ \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 - \dot{\mathbf{r}}_0 \Delta t - \Delta t^2 \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{\mathbf{r}}_0 \right] \end{aligned} \quad (5.45)$$

2. Ze wzorów (5.45) ułożonych dla  $i=l$  obliczamy kolejno:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_2 &= \left( \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \mathbf{M} + \mathbf{K} \right)^{-1} \left\{ \mathbf{M} \left[ \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \mathbf{r}_1 + \frac{1}{\alpha \Delta t} \dot{\mathbf{r}}_1 + \left( \frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{\mathbf{r}}_1 \right] - \mathbf{P}_2 \right\} \\ \dot{\mathbf{r}}_2 &= \frac{\delta}{\alpha \Delta t} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + \left( 1 - \frac{\delta}{\alpha} \right) \dot{\mathbf{r}}_1 + \Delta t \left( 1 - \frac{\delta}{2\alpha} \right) \ddot{\mathbf{r}}_1 \\ \ddot{\mathbf{r}}_2 &= \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \left[ \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 - \dot{\mathbf{r}}_1 \Delta t - \Delta t^2 \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{\mathbf{r}}_1 \right] \end{aligned} \quad (5.46)$$

3. Dla chwili  $i=2$  i kolejnej wyznaczamy w analogiczny sposób, itd.

Takie postępowanie „*krok po kroku*” nazywa się obliczeniami rekurencyjnymi.

### 5.3.4 Metoda Zienkiewicza – Wooda (SSpj)

W metodzie SSpj nieznaną funkcję  $x(t)$  poszukujemy w kolejnych dyskretyzacyjnych punktach na osi czasu. Funkcję tę w przedziale czasu od  $t_i$  do  $t_{i+1}$  przedstawiamy w postaci szeregu Taylora [Zienkiewicz i in. 1984; Podhorecki 1997]

$$x(t) = x_i + \dot{x}_i t + \frac{1}{2} \ddot{x}_i t^2 + \dots + \frac{1}{p!} (t)^p \alpha_i^{(p)} \quad (5.47)$$

$$t \in \langle t_i, t_{i+1} \rangle$$

$\alpha_i^{(p)}$  - zawiera resztę z rozwinięcia funkcji  $x(t)$ .

W metodzie SSpj wielkość  $p$  oznacza liczbę wyrazów rozwinięcia badanej (analizowanej) funkcji  $x(t)$ , a wielkość  $j$  oznacza rząd rozwiązywanego równania różniczkowego.

Metodę SSpj można zastosować do rozwiązywania równań różniczkowych dowolnego rzędu. Poniżej przedstawione są efektywne wzory rekurencyjne dla  $j=2$  oraz  $p=2$  i  $p=3$ , które rozwiązują analizowane równanie ruchu (5.20):

- Metoda Zienkiewicza-Wooda SS<sub>22</sub> – algorytm kwadratowy. W algorytmie kwadratowym mamy dwa parametry  $\theta_1$  i  $\theta_2$ . Procedura postępowania jest następująca:

$$\alpha_i = \left[ \mathbf{M} + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \theta_2 \mathbf{K} \right]^{-1} \left[ -\theta_1 \mathbf{P}_{i+1} - (1 - \theta_1) \mathbf{P}_i - \mathbf{K}(\mathbf{r}_i + \Delta t \theta_1 \dot{\mathbf{r}}_i) \right]$$

$$\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i + \Delta t \dot{\mathbf{r}}_i + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \alpha_i \quad (5.48)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_{i+1} = \dot{\mathbf{r}}_i + \Delta t \alpha_i$$

gdzie

$i=0, 1, 2, \dots, T$  ( $T$  – dane, liczba chwil na osi czasu)

$\mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0$  – dane warunki początkowe

Przyjęcie parametrów metody  $\theta_j$  prowadzi do metod:

- Wariant metody Newmarka bezwarunkowo stabilny

$$\theta_1 = 0,5 \quad \theta_2 = 1,0$$

- Wariant metody Pensego i Wooda bezwarunkowo stabilny

$$\theta_1 = 0,6 \quad \theta_2 = 0,605$$

- Wariant metody Dahlquista

$$\theta_1 = \theta_2 = 0,5$$

- Wariant metody Zlamala

$$\theta_1 = \frac{5}{6} \quad \theta_2 = \frac{8}{9}$$

- Metoda Zienkiewicza-Wooda SS<sub>32</sub> – algorytm sześcienny. W algorytmie sześciennym mamy trzy parametry metody  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  i  $\theta_3$ . Procedura postępowania jest następująca:

$$\alpha_i = \left[ \Delta t \theta_1 \mathbf{M} + \frac{1}{6} (\Delta t)^3 \theta_3 \mathbf{K} \right]^{-1} \left\{ -\theta_1 \mathbf{P}_{i+1} + (1 - \theta_1) \mathbf{P}_i - \theta_0 \mathbf{M} \ddot{\mathbf{r}}_i - \left[ \theta_0 \mathbf{r}_i + \Delta t \theta_1 \dot{\mathbf{r}}_i + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \theta_2 \ddot{\mathbf{r}}_i \right] \mathbf{K} \right\}$$

$$\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i + \Delta t \dot{\mathbf{r}}_i + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \ddot{\mathbf{r}}_i + \frac{1}{6} (\Delta t)^3 \alpha_i$$

(5.49)

$$\dot{\mathbf{r}}_{i+1} = \dot{\mathbf{r}}_i + \Delta t \ddot{\mathbf{r}}_i + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \alpha_i$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_{i+1} = \ddot{\mathbf{r}}_i + \Delta t \alpha_i$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, T$$

Przyjęcie parametrów  $\theta_i$  prowadzi do metod:

➤ Algorytm Houbolta bezwarunkowo stabilny

$$\theta_0 = 1 \quad \theta_1 = 2$$

$$\theta_2 = \frac{11}{3} \quad \theta_3 = 6$$

➤ Algorytm Wilsona bezwarunkowo stabilny

$$\theta_0 = 1 \quad \theta_1 = \theta_w$$

$$\theta_2 = \theta_w^2 \quad \theta_3 = \theta_w^3$$

$$\theta_w \geq 1,366$$

### 5.3.5 Metoda Houbolta

Metoda Houbolta jest metodą podobną do metody różnic skończonych. Opiera się ona na wyrażeniach różnicowych zastosowanych do aproksymacji wektorów przyspieszenia i prędkości przemieszczeń. W metodzie Houbolta wzory rekurencyjne mają następującą postać [Houbolt 1950; Rakowski i Kacprzyk 1993]:

$$\mathbf{r}_{i+1} = \left[ \frac{2}{(\Delta t)^2} \mathbf{M} + \mathbf{K} \right]^{-1} \left\{ \frac{1}{(\Delta t)^2} \mathbf{M} \mathbf{r}_{i-2} - \frac{4}{(\Delta t)^2} \mathbf{M} \mathbf{r}_{i-1} + \frac{5}{(\Delta t)^2} \mathbf{M} \mathbf{r}_i - \mathbf{P}_{i+1} \right\}$$

$$\dot{\mathbf{r}}_{i+1} = \frac{1}{6\Delta t} (11\mathbf{r}_{i+1} - 18\mathbf{r}_i + 9\mathbf{r}_{i-1} - 2\mathbf{r}_{i-2}) \quad (5.50)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_{i+1} = \frac{1}{(\Delta t)^2} (2\mathbf{r}_{i+1} - 5\mathbf{r}_i + 4\mathbf{r}_{i-1} - \mathbf{r}_{i-2})$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, T$$

Znając wektory  $\mathbf{P}_{i+1}$ ,  $\mathbf{r}_i$ ,  $\mathbf{r}_{i-1}$ ,  $\mathbf{r}_{i-2}$  i stosując wzór (5.47)<sub>1</sub> możemy znaleźć wektor  $\mathbf{r}_{i+1}$ . Taka procedura nazywa się metodą całkowania niejawnego. Do obliczenia wartości  $\mathbf{r}_1$  potrzebujemy znać wartości  $\mathbf{r}_1$  i  $\mathbf{r}_2$ . Wykorzystując specjalną aproksymację funkcji  $r(t)$  w otoczeniu punktu  $i=0$ , rzędne nieznanne  $\mathbf{r}_1$  i  $\mathbf{r}_2$  uzależniamy od warunków początkowych. Możemy użyć np. aproksymacji kwadratowej

---

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + \mathbf{b} t + \mathbf{c} t^2 \quad (5.51)$$

gdzie z warunków początkowych wyznaczamy stałe  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  i  $\mathbf{c}$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t = 0) &= \mathbf{r}_0 \\ \dot{\mathbf{r}}(t = 0) &= \dot{\mathbf{r}}_0 \\ \ddot{\mathbf{r}}(t = 0) &= \ddot{\mathbf{r}}_0 \end{aligned} \quad (5.52)$$

Po podstawieniu, równanie (5.48) przyjmuje postać

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \dot{\mathbf{r}}_0 t + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{r}}_0 t^2 \quad (5.53)$$

Nieznane przemieszczenie  $\ddot{\mathbf{r}}_0$  możemy wyznaczyć ze wzoru (5.30). Stąd nieznane wektory przemieszczeń  $\mathbf{r}_{-1}$  i  $\mathbf{r}_{-2}$  wynoszą:

$$\mathbf{r}(t = -\Delta t) = \mathbf{r}_{-1} = \mathbf{r}_0 - \Delta t \dot{\mathbf{r}}_0 + \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{\mathbf{r}}_0 \quad (5.54)$$

$$\mathbf{r}(t = -2\Delta t) = \mathbf{r}_{-2} = \mathbf{r}_0 - 2\Delta t \dot{\mathbf{r}}_0 + 2(\Delta t)^2 \ddot{\mathbf{r}}_0$$

## 6. OPIS AUTORSKIEGO MODELU OBLICZENIOWEGO

### 6.1. ZAŁOŻENIA

Zdefiniowano równanie ruchu (5.21), z uwzględnieniem zaawansowanych nieliniowości geometrycznych i ze wszystkimi składowymi sił bezwładności. Pręt ma wstępną krzywiznę  $w_0(x)$  i jest obciążony siłą ściskającą  $P(t)$ . Jest to w istocie problem początkowo-brzegowy, stąd po zastosowaniu metody elementów skończonych otrzymano sprzężony układ równań różniczkowych zwyczajnych ze zmiennymi współczynnikami, zależnymi od parametrów węzłowych  $r_i(t)$ .

Głównym problemem jest obliczenie siły krytycznej  $P_{kr}$  przy ustalonej częstotliwości działania siły/wymuszenia  $\omega$  lub częstotliwości krytycznej  $\omega_{kr}$  przy ustalonej sile  $P$ . W związku z tym, istotne są następujące podstawowe rozstrzygnięcia:

- przyjęcie metody numerycznej bezpośredniego całkowania równań ruchu (5.21);
- przyjęcie kryterium dokładności obliczeń w procesie iteracji;
- przyjęcie definicji spełnienia warunku utraty stateczności.

### 6.2. PRZYJĘTA METODA NUMERYCZNA BEZPOŚREDNIEGO CAŁKOWANIA RÓWNAŃ RUCHU

Przyjęto, że w autorskim modelu obliczeniowym korzystać się będzie z metody Newmarka, którą przedstawiono dla zagadnienia geometrycznie liniowego w pkt. 5.3.3. Do dalszych obliczeń przyjęto, że równanie ruchu ze zmiennymi współczynnikami w postaci (5.21) rozwiązywane będzie metodą Newmarka w postaci bezwarunkowo stabilnej, kiedy parametry metody wynoszą (5.42)  $\delta = 0,5$ ,  $\alpha = 0,25$ . Korzystając z postaci równania ruchu (5.21), obliczenia sprowadzają się do następującej procedury rekurencyjnej wzdłuż osi czasu

$$\mathbf{r}_{i+1} = \left[ \frac{1}{0,25\Delta t^2} \mathbf{M} + \mathbf{K} \right]^{-1} \left\{ \mathbf{M} \left[ \frac{1}{0,25\Delta t^2} \mathbf{r}_i + \frac{1}{0,25\Delta t} \dot{\mathbf{r}}_i + \ddot{\mathbf{r}}_i \right] - \mathbf{P}_{i+1} \right\}$$

$$\dot{\mathbf{r}}_{i+1} = \frac{2}{\Delta t} (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) - \dot{\mathbf{r}}_i \tag{6.1}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_{i+1} = \frac{1}{0,25\Delta t^2} [\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i - \dot{\mathbf{r}}_i \Delta t - \Delta t^2 0,25 \ddot{\mathbf{r}}_i]$$

$i = 0, 1, 2, \dots$  - punkty na osi czasu.

Problem z prowadzeniem procesu rekurencyjnego polega na tym, że wyrazy po prawej stronie wzoru (5.22) zależą od nieznanymi przemieszczeń  $r(t)$ . W tej sytuacji niezbędna jest procedura iteracyjna w każdym kroku rekurencyjnym oraz kryterium zakończenia iteracji (pkt. 6.3). Podstawowym wynikiem obliczeń jest jednak ustalenie warunków utraty stateczności (pkt. 6.4).

### 6.3. KRYTERIUM DOTYCZĄCE DOKŁADNOŚCI OBLICZEŃ W PROCESIE ITERACJI

Istotne jest to, że w toku prowadzonych obliczeń równania (5.21) musimy w każdej chwili procesu rekurencyjnego spełniać zerowanie się tego równania w każdej chwili „ $i$ ”, osiąganym w procesie iteracji, tzn.

$$e_i = M\ddot{r}_i + {}^L K r_i + P_i(r, t) \cong 0 \quad (6.2)$$

gdzie  $e_i$  jest kolumną zawierającą niedokładność rozwiązania równania (6.2) w kolejnych krokach  $i = 1, 2, \dots$ . Można też powiedzieć, że każdy wyraz kolumny  $e_i$  charakteryzuje dokładność bezwzględną rozwiązania równania (6.2) wyrażaną w jednostkach siły. Wydaje się, że najlepszym kryterium dokładności rozwiązania równania (6.2) będzie sprawdzenie każdego wyrazu kolumny  $e$  i porównanie tego wyrazu z bezwzględną wartością siły  $|P_i|$  zawartą w kolumnie  $P$  (siła ta musi pochodzić z tego samego równania co  $e_i$ ). W związku z tym kryterium dokładności w obliczeniach iteracyjnych można zdefiniować następująco

$$e_i < \frac{P_i}{500} = \delta_{dop} \quad (6.3)$$

gdzie  $\delta_{dop}$  jest dopuszczalną niedokładnością obliczeń spełnienia równania ruchu (liczba 500 jest tutaj liczbą umowną).

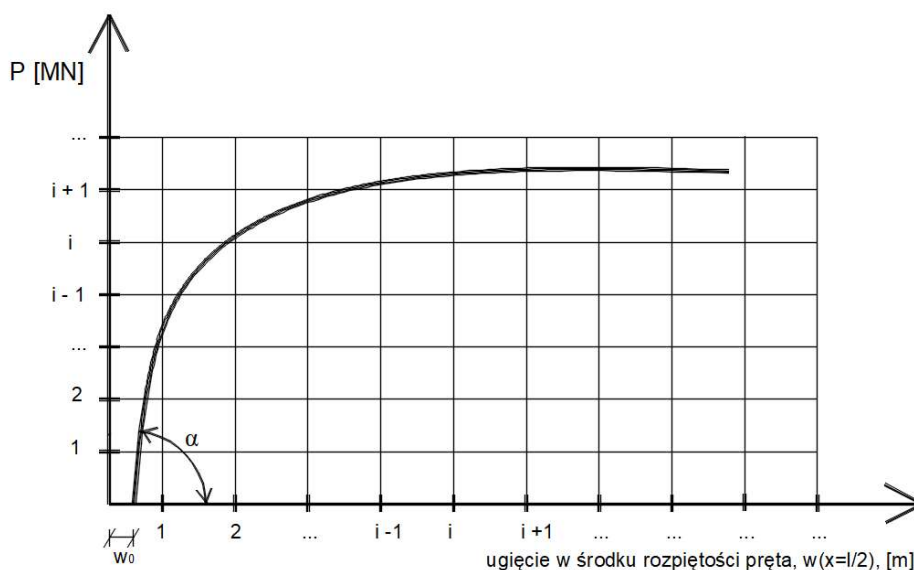
Należy od razu zaznaczyć, że warunek/kryterium (6.2) dotyczy dokładności rozwiązania równania ruchu w kolejnych chwilach „ $i$ ”. Oddzielnym problemem jest proces zbieżności rozwiązania iteracyjnego prowadzącego do spełnienia warunku (6.2). Może się okazać w procesie walidacji modelu obliczeniowego, że należy zdynamizować proces zbieżności. Metody przyspieszenia zbieżności są dobrze przedstawione w dostępnej literaturze.

### 6.4. PRZYJĘTA DEFINICJA STATECZNOŚCI PRĘTA

Przyjęto, że utrata stateczności ma charakter przemieszczeniowy. Przyjmuje się, że pręt traci stateczność, gdy przy  $P = P_{\min}$  przy ustalonej częstotliwości  $\omega$  (oddalonej od strefy rezonansu) następuje duży przyrost przemieszczeń przy prawie

niezmiennej sile ściskającej  $P$ , tzn. przy niewielkim wzroście siły  $P$  następuje progresywny przyrost ugięcia pręta. Może wystąpić też sytuacja, że przy ustalonej  $P < P_{kr}$  następuje gwałtowny przyrost amplitud przemieszczeń przy pewnej częstotliwości  $\omega_{kr}$  traktowanej jako częstotliwość krytyczną.

Wiadomo, że w fazie obciążania pręta siłą  $P$  mniejszą od siły krytycznej ( $P < P_{kr}$ ) przy  $\omega=0$ , zależność przemieszczeń od obciążeń jest prawie liniowa. W momencie utraty stateczności pręt doznaje istotnie zwiększonych przemieszczeń, wyraźnie zanika proporcjonalność między przemieszczeniem a obciążeniem (rys. 6.1).



Rys. 6.1. Przewidywany wykres zależności przemieszczeń poprzecznych wybranego punktu pręta przy wstępnej krzywiźnie  $w_0(x)$

Korzystając z rys. 6.1 możemy określić kąt  $\alpha$

- kąt przy początkowym obciążeniu

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{w_1 - w_0}{P_1 - P_0}, \quad (6.4)$$

czyli

$$\alpha_0 = \operatorname{arctg} \frac{w_1 - w_0}{P_1 - P_0}, \quad (6.5)$$

- kąt przy dalszym obciążaniu

$$\operatorname{tg} \alpha_i = \frac{w_{i+1} - w_i}{P_{i+1} - P_i}, \quad (6.6)$$



czyli

$$\alpha_i = \arctg \frac{w_{i+1} - w_i}{P_{i+1} - P_i},$$

$$i = 1, 2, 3, \dots$$
(6.7)

Można przyjąć umownie, że stan stateczności pręta będzie spełniony, jeżeli kąt  $\alpha_i$  niewiele różni się od kąta  $\alpha_0$  z dokładnością  $\delta$ , tj. jeżeli spełniony jest warunek (który można nazwać warunkiem stateczności)

$$(1 - \delta)\alpha_0 < \alpha_i < (1 + \delta)\alpha_0,$$

$$i = 1, 2, 3, \dots$$
(6.8)

Można też przyjąć umownie, że stan graniczny określający siłę krytyczną  $P_{kr}$  wystąpi, gdy spełniony jest warunek

$$\alpha_k = (1 + \delta)\alpha_0,$$

$$k = i+1$$
(6.9)

Powyższe rozważania prowadzą do oczywistego wniosku, że nierówność

$$\alpha_j < \alpha_k,$$

$$j > k$$
(6.10)

oznacza stan niestateczności.

Współczynnik  $\delta$  oznacza w istocie odstępstwo wykresu zależności przemieszczenia – siła, od linii prostej. Współczynnik ten powinien być ustalony w procesie walidacji modelu obliczeniowego. Jest to wielkość umowna. Można przyjąć, że współczynnik  $\delta$  wynosi 0,10.

Można zatem stwierdzić, że siła  $P_k$  jest najmniejszą siłą  $P$ , czyli  $P_{min}$  powodującą utratę stateczności, czyli  $P_{kr} = P_{min}$  jest siłą krytyczną. Podobny przebieg ma dyskusja dotycząca analizy, np. przemieszczenia podłużnego prowadząca do podobnych rezultatów. Trzeba jeszcze zaznaczyć, że w przypadku drgań ( $\omega \neq 0$ ) analiza powyżej przedstawiona powinna dotyczyć amplitud przemieszczeń.

W przypadku poszukiwania częstości krytycznej  $\omega_{kr}$  przy ustalonej sile  $P < P_{kr}$  prowadzącej do utraty stateczności, dokonujemy analizy w analogiczny sposób, jaki zastosowano do ustalenia  $P_{kr}$ .

## 7. PRZYKŁADY OBLICZEŃ Z ANALIZĄ

### 7.1. ANALIZOWANE ZADANIE, PRZYJĘTA FUNKCJA KSZTAŁTU ORAZ INNE ZAŁOŻENIA

Rozpatrujemy pręt krępy, beznaprężeniowo zakrzywiony. Pręt ten ma przyjętą wstępną, niewielką krzywiznę, funkcję  $w_0(x, t_0)$ . Pręt jest jednorodny, o gęstości objętościowej  $\rho$ , liniowo sprężysty i izotropowy o cechach  $E$ ,  $G$ , niezmiennym polu przekroju poprzecznego  $A$  i momencie bezwładności  $I$  (rys. 4.2). Analizujemy pręt podlegający nieliniowym przemieszczeniom i odkształceniom.

Ze wszystkich równań i wzorów (5.9) ÷ (5.15) wynika, że funkcja kształtu może być liniowa, gdyż co najwyżej występuje pierwsza pochodna tej funkcji. W związku z tym do dalszych analiz i obliczeń przyjęto następującą, najprostszą liniową funkcję kształtu (rys. 7.1.):

$$\Phi_i = \Phi_i(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi_i \xi) \quad (7.1)$$

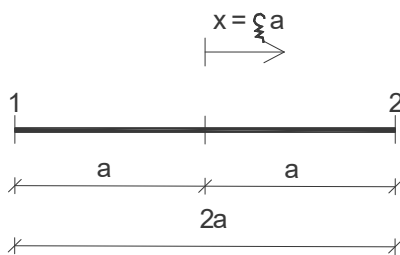
$$i = 1, 2$$

gdzie:

$\xi$  – bezwymiarowa funkcja  $\xi \in (-1, 1)$ ,

$\xi_i$  – wielkość regulująca znak,

$$\xi_i \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{dla } i = 2 \\ -1 & \text{dla } i = 1 \end{cases}$$



$$-a \leq x \leq a$$

$$-1 \leq \xi \leq 1$$

$$-1 \leq \frac{x}{a} = \xi \leq 1$$

Rys. 7.1. Rozpatrywany element skończony pręta (ES)

Wiadomo, że przy analizie zginania belek stosuje się prawie zawsze nieliniowe funkcje kształtu (zwykle wielomiany 3. stopnia). Są to funkcje wynikające z rozwiązania równania różniczkowego jednorodnego opisującego zginanie belki. Otrzymujemy wtedy funkcje kształtu „dopasowane”, co prowadzi do tego, że do wystarczająco dokładnych obliczeń można stosować mniejszą liczbę ES. Od razu wiadomo, że stosowanie liniowych funkcji kształtu wymagać będzie większej liczby ES.

Znając funkcję kształtu można opisać za pomocą parametrów węzłowych  $r_i^e(t)$  następujące funkcje przemieszczeń ES (rys. 5.3):

➤ przemieszczenia osiowe

$$u(x, t) = \Phi_i^u(x) r_i(t), \quad i=1,2, \dots, 6 \quad (7.2)$$

$$\Phi_i^u \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} i = 1, 4, & \Phi_i^u = \frac{1}{2}(1 + \xi_i^u \xi) \\ i = 2, 3, 5, 6, & \Phi_i^u = 0 \end{cases}$$

$$\xi_i^u \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} -1 & \text{dla } i = 1 \\ 1 & \text{dla } i = 4 \end{cases}$$

➤ przemieszczenia poprzeczne

$$w(x, t) = \Phi_i^w(x) r_i(t), \quad i=1,2, \dots, 6 \quad (7.3)$$

$$\Phi_i^w \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} i = 2, 5, & \Phi_i^w = \frac{1}{2}(1 + \xi_i^w \xi) \\ i = 1, 3, 4, 6, & \Phi_i^w = 0 \end{cases}$$

$$\xi_i^w \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} -1 & \text{dla } i = 2 \\ 1 & \text{dla } i = 5 \end{cases}$$

➤ kąt obrotu

$$\psi(x, t) = \Phi_i^\psi(x) r_i(t), \quad i=1,2, \dots, 6 \quad (7.4)$$

$$\Phi_i^\psi \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} i = 3, 6, & \Phi_i^\psi = \frac{1}{2}(1 + \xi_i^\psi \xi) \\ i = 1, 2, 4, 5, & \Phi_i^\psi = 0 \end{cases}$$

$$\xi_i^\psi \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} -1 & \text{dla } i = 3 \\ 1 & \text{dla } i = 6 \end{cases}$$

Mając ustaloną funkcję kształtu ES (7.1) ÷ (7.4) można opisać macierze charakteryzujące ES, czyli  ${}^L\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{M}$  i  ${}^L\mathbf{F}$  oraz także można opisać parametrami węzłowymi  $r_i(t)$  poszczególne nieliniowe macierze sztywności, tj.  ${}^N\mathbf{K}^e(\mathbf{r})$  i  ${}^{NN}\mathbf{K}(\mathbf{r})$  oraz  ${}^N\mathbf{F}$  (5.10) ÷ (5.15). Następnie po globalizacji (agregacji) otrzymujemy układ równań różniczkowych zwyczajnych ze zmiennymi współczynnikami (zależnymi od  $\mathbf{r}$ ) (5.19). Równanie to sprowadzamy do postaci (5.21) i następnie prowadzimy proces rekurencyjny stosując metodę Newmarka (pkt. 6.2 niniejszej pracy).

## 7.2. WYZNACZENIE SIŁY KRYTYCZNEJ PRZY STATYCZNYM OBCIĄŻENIU

Rozpatruje się następujący problem testujący opracowany model obliczeniowy:

- Analiza obliczeniowa dotyczy pręta krępego, beznapężeniowo zakrzywionego. Oznacza to, że pręt ma przyjętą niewielką krzywiznę wstępną  $w_0(x)$  (rys. 4.2). Pręt wykonany jest z materiału jednorodnego o stałej gęstości objętościowej  $\rho$ , z materiału liniowo sprężystego i izotropowego. Pręt jest obciążony siłą  $P$  (rys. 4.2).
- Celem niniejszego zadania jest sprawdzenie efektywności przyjętego modelu obliczeniowego, a w szczególności:
  - ustalenie zbieżności procesu iteracyjnego, co w istocie oznacza weryfikację i ewentualną modyfikację umownego wzoru (6.3); rozważania dotyczą przypadku, kiedy siła  $P \ll P_{kr}^E$  (siły krytycznej obliczonej wg wzoru Eulera);
  - obliczenie umownej siły krytycznej  $P_{kr}$  przy uwzględnieniu definicji umownej utraty stateczności (6.9); to postępowanie prowadzi do weryfikacji poprawności tej umowy.

Wnioski ilościowe i jakościowe stanowią wskazówki do analiz bardziej zaawansowanych, kiedy siła ściskająca  $P(t)$  jest np. funkcją czasu.

Jako dane do zadania przyjęto belkę wolnopodpartą o długości  $l = 6,0$  m, o przekroju poprzecznym prostokątnym:  $b = 0,2$  m,  $h = 0,4$  m. Rozpatruje się pręt stalowy,  $E = 2,1 \cdot 10^5$  MPa,  $G = 0,8 \cdot 10^5$  MPa,  $\rho = 0,078$  MN/m<sup>3</sup>, współczynnik  $k = 5/6$ .

Model obliczeniowy pręta poddanego obciążeniu ściskającemu zaprogramowano w autorskim programie w języku C++. Po wprowadzeniu niezbędnych danych i wprowadzeniu wstępnej krzywizny o kształcie paraboli drugiego stopnia ze strzałką ugięcia równą 0,001 m, obliczono siłę krytyczną, która powoduje utratę stateczności rozważanego pręta.

Przy statycznym działaniu siły  $P$ , równanie ruchu w postaci (5.21) przechodzi w równanie równowagi

$$[{}^L\mathbf{K} + {}^N\mathbf{K}(\mathbf{r}) + {}^{NN}\mathbf{K}(\mathbf{r})]\mathbf{r} = \mathbf{F}. \quad (7.5)$$

Do rozwiązania tego równania stosujemy proces iteracyjny, rozwiązując równanie

$${}^L\mathbf{K}\mathbf{r} = \mathbf{P}(\mathbf{r}), \quad (7.6)$$

gdzie

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \mathbf{F} + [{}^N\mathbf{K}(\mathbf{r}) + {}^{NN}\mathbf{K}(\mathbf{r})]\mathbf{r}. \quad (7.7)$$

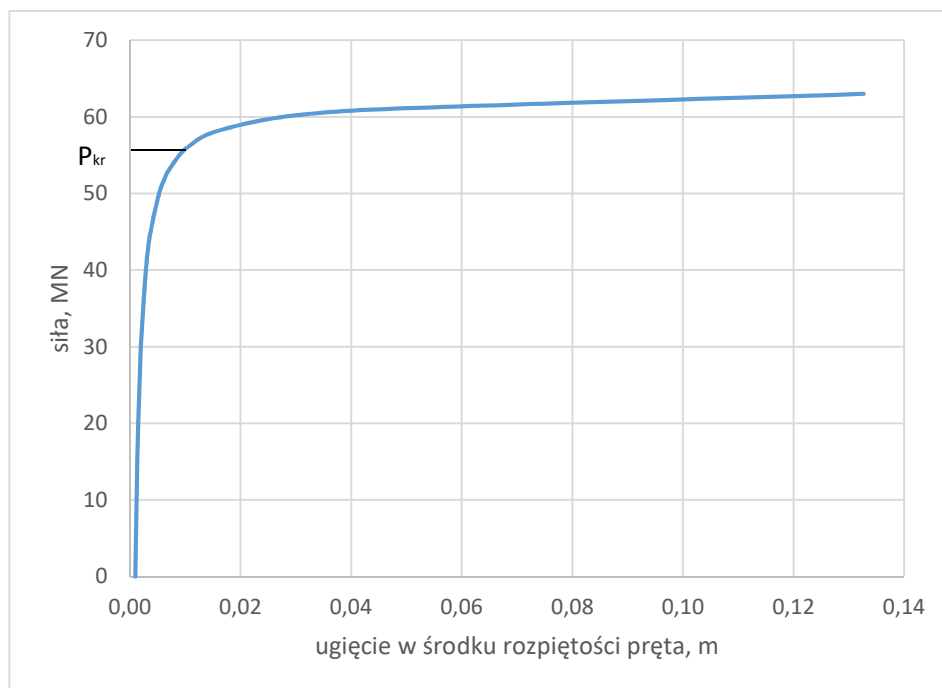
Wiadomo, że w niniejszej pracy w wyprowadzonych równaniach uwzględnia się zaawansowane nieliniowości geometryczne oraz krzywiznę wstępną pręta  $w_0(x)$ . To powoduje, że wyznaczona siła krytyczna wg takiego modelu obliczeniowego będzie siłą bardziej obiektywną niż siła wyznaczona wg wzoru Eulera. Można jednak zauważyć, że siła wyznaczona wg autorskiego modelu obliczeniowego musi lokalizować się w otoczeniu siły krytycznej Eulera  $P_{kr}^E$ .

Jak wspomniano na wstępie rozprawy, problematykę stateczności jako pierwszy analizował Euler, który wyprowadził wzór na siłę krytyczną, powodującą wyboczenie pręta prostego, ściskanego przy wyboczeniu sprężystym

$$P_{kr}^E = \pi^2 \frac{EI}{l_w^2} = 61,407 \text{ MN}, \quad (7.8)$$

gdzie  $EI$  jest sztywnością giętą, a  $l_w$  długością wyboczeniową pręta.

Wyniki dotyczące zależności pomiędzy ugięciem w środku rozpiętości pręta w stosunku do przykładanej siły statycznej przedstawiono na rysunku 7.2. Widać, że początkowo (przy sile  $P \ll P_{kr}^E$ ) wykres zależności pomiędzy obciążeniem a przemieszczeniem jest prawie liniowy i spełnia warunek stateczności (6.8). Potem przy większej sile  $P$  następuje większy wpływ nieliniowości geometrycznych, stąd zależność pomiędzy obciążeniem a przemieszczeniem jest coraz bardziej nieliniowa. Dalsze zwiększanie siły  $P$  (nawet niewielkie) powoduje bardzo duży przyrost przemieszczeń. Na podstawie przyjętego umownego warunku stateczności (6.9) ustalono wartość siły krytycznej.

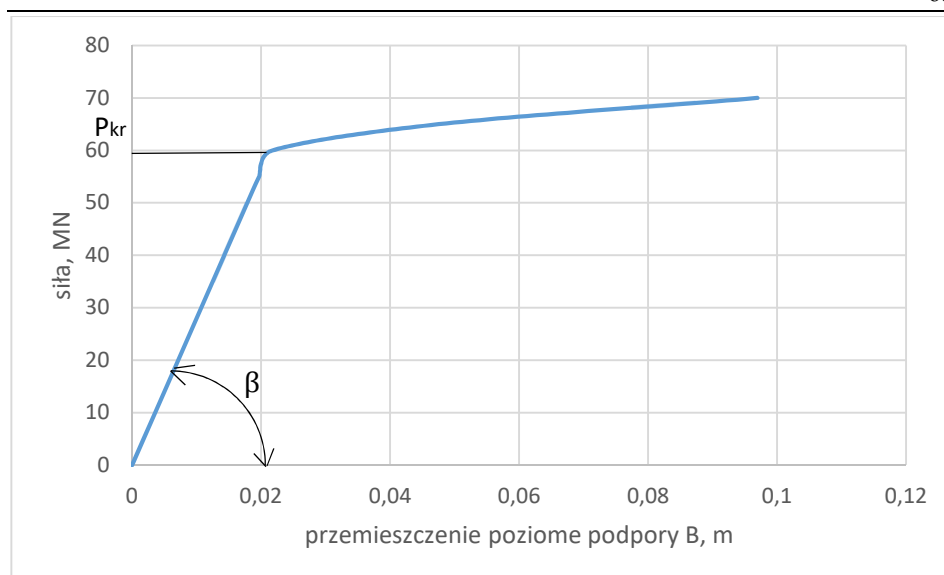


Rys. 7.2. Ugięcie w środku rozpiętości pręta w funkcji wartości siły obciążającej pręt

Na podstawie analizy wyników obliczeń można sformułować następujące syntetyczne wnioski:

- Wartość umownej siły krytycznej została ustalona wg kryterium (6.9) i wynosi  $P_{kr} = 55,859 MN$ . Wartość siły krytycznej obliczonej wg wzoru Eulera (7.5) wynosi  $P_{kr}^E = 61,407 MN$ .
- Przebieg przyrostu przemieszczeń w zależności od wzrastającej siły przedstawiony na wykresie (rys. 7.2) potwierdza teoretyczne założenia, przedstawione w punkcie 6.4 niniejszej rozprawy i zobrazowane na wykresie (rys. 6.1).
- Wartości sił przedstawione na wykresie (rys. 7.2) zostały obliczone przy podziale pręta na 150 elementów skończonych ES.

Sporządzono jeszcze wykres zależności przemieszczenia poziomego podpory B w zależności od siły P (rys. 7.3). Przebieg tego wykresu jest podobny do wykresu ugięć (rys. 7.2).



Rys. 7.3. Przesunięcie poziome podpory B w funkcji wartości siły obciążającej pręt

Na podstawie wykresu (rys. 7.3) i kryterium (6.9) ustalono wartość siły krytycznej wynoszącej  $P_{kr} = 59,210$  MN. Wartość ta pokrywa się z dokładnością ok. 10% z siłą  $P_{kr}$  wcześniej ustaloną. Na podstawie wykresu (rys. 7.3) można ustalić tangens kąta  $\beta$  wynoszący  $\operatorname{tg}\beta = 2,747$ , czyli  $\beta = 70^\circ$ . Wartość tę można zweryfikować w przybliżeniu korzystając z klasycznego prawa Hooke'a

$$\Delta l = \frac{Pl}{EA}, \quad (7.9)$$

przekształcając w odpowiedni sposób

$$P = \Delta l \cdot \operatorname{tg}\beta', \quad (7.10)$$

gdzie

$$\operatorname{tg}\beta' = \frac{EA}{l} = \frac{2,10 \cdot 10^5 \cdot 0,2 \cdot 0,4}{6} = 2800 \frac{\text{MN}}{\text{m}} \quad (7.11)$$

$$\beta' = 89,97^\circ$$

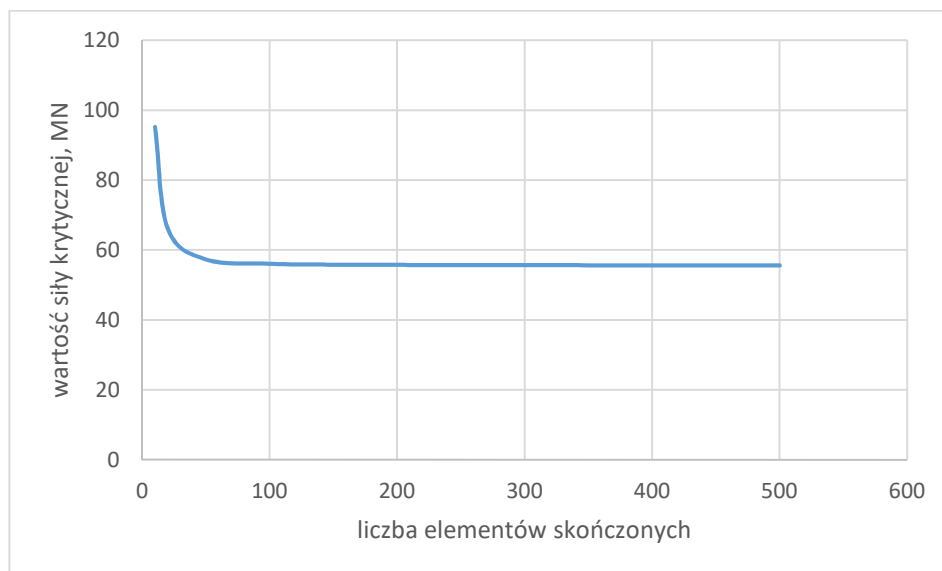
Z powyższej analizy wynika zróżnicowanie kątów  $\beta$ . Zróżnicowanie to wynika z bardziej zaawansowanego modelu obliczeniowego (nieliniowości geometryczne, sprzężenie przemieszczeń poprzecznych z podłużnymi, wstępna krzywizna pręta), czego nie uwzględnia klasyczne prawo Hooke'a (7.9). Z wykresu (rys.

7.3) wynika, że po przekroczeniu umownej siły krytycznej spada sztywność podłużna pręta.

Wyniki obliczeń dotyczące zależności pomiędzy liczbą elementów skończonych a wartością obliczonej siły krytycznej przedstawiono w tabeli 7.1 i zobrażowano na rysunku 7.4. Z otrzymanego wykresu wynika, że przy małej liczbie ES uzyskujemy zupełnie niemiernodajne wyniki obliczeń. Te nieprawidłowości wynikają z wybranych liniowych funkcji kształtu. Z przeprowadzonej analizy wynika, że w rozważanym zadaniu należy przyjąć minimum ok. 50 ES.

Tabela 7.1 Wartość siły krytycznej w zależności od przyjętej liczby elementów skończonych

| Liczba elementów skończonych | Wartość obliczonej siły krytycznej [MN] |
|------------------------------|---|
| 10                           | 95,249                                  |
| 20                           | 66,156                                  |
| 50                           | 57,589                                  |
| 100                          | 56,104                                  |
| 150                          | 55,859                                  |
| 250                          | 55,749                                  |
| 500                          | 55,598                                  |



Rys. 7.4. Zależność wartości obliczonej siły krytycznej od liczby elementów skończonych



Na podstawie analizy wyników obliczeń można sformułować następujące syntetyczne wnioski:

- Liczba elementów skończonych wpływa oczywiście na dokładność obliczonej siły krytycznej.
- Różnica w obliczonej wartości siły krytycznej przy 150 i 250 elementach skończonych jest niewielka

$$\frac{P_{kr}^{150} - P_{kr}^{250}}{P_{kr}^{250}} \cdot 100\% = \frac{55,859 - 55,749}{55,749} \cdot 100\% = 0,197\%. \quad (7.12)$$

W związku z tym do dalszych obliczeń przyjęto 150 elementów skończonych. Ta uwaga dotyczy także przypadków, kiedy siła  $P$  jest inna niż  $P_{kr}$ .

- Tak duża liczba elementów skończonych jest efektem przyjęcia liniowej funkcji kształtu w opisie ES.

W całym toku obliczeń iteracyjnych niezbędne jest spełnienie warunku (6.3), czyli dokładności rozwiązania równania równowagi (7.6). Warunek ten sprawdzano dla każdej siły  $P$ . W przypadku  $P_{kr}$  dokładność ta wyniosła

$$e_{max} = 0,0396 < \delta_{dop} = \frac{55,717}{500} = 0,111. \quad (7.13)$$

Interesującym problemem jest oszacowanie wpływu nieliniowych macierzy sztywności  ${}^N\mathbf{K}(\mathbf{r})$  i  ${}^{NN}\mathbf{K}(\mathbf{r})$  na wyniki obliczeń, czyli wyznaczenie przemieszczeń  $\mathbf{r}$  w zależności od wartości siły  $P$ . Wiadomo, że po wyznaczeniu przemieszczeń  $\mathbf{r}$  w procesie iteracyjnym, musi być spełnione równanie równowagi (7.5) z założoną dokładnością (6.3). Oznacza to w istocie równość prawej i lewej strony tego równania. Możemy więc równanie (7.5) zapisać w postaci:

$${}^L\mathbf{P} + {}^N\mathbf{P} + {}^{NN}\mathbf{P} = \mathbf{F}, \quad (7.14)$$

gdzie

$$\begin{aligned} {}^L\mathbf{P} &= {}^L\mathbf{K}\mathbf{r}, \\ {}^N\mathbf{P} &= {}^N\mathbf{K}\mathbf{r}, \\ {}^{NN}\mathbf{P} &= {}^{NN}\mathbf{K}\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Zapis w postaci (7.15) umożliwia jednoznaczne określenie wpływu macierzy sztywności, tj. macierzy liniowej  ${}^L\mathbf{K}$  (niezależnej od  $\mathbf{r}$ ), pierwszej macierzy nieliniowej  ${}^N\mathbf{K}$  (zależnej od  $\mathbf{r}$ ) i drugiej macierzy nieliniowej  ${}^{NN}\mathbf{K}$  (zależnej od  $\mathbf{r}$ ) na wynik obliczeń w zależności od wartości siły  $P$  i ugięcia początkowego  $w_0(x)$ .

Należy spodziewać się, że przy  $P \ll P_{kr}$  dominować będzie macierz liniowa  ${}^L\mathbf{K}$ , a wpływy macierzy nieliniowych  ${}^N\mathbf{K}(\mathbf{r})$  i  ${}^{NN}\mathbf{K}(\mathbf{r})$  będą śladowe, co prowadzi do prawie liniowego przebiegu przemieszczeń (rys. 7.2). Przy wzrastającej sile  $P$  znaczenie macierzy nieliniowych wzrasta, czego obrazem jest wykres nieliniowy przebiegu przemieszczeń (rys. 7.2).

### 7.3. WYZNACZENIE SIŁY KRYTYCZNEJ PRZY OBCIĄŻENIU PRĘTA SIŁĄ HEAVISIDE'A

Przy obciążeniu dynamicznym należy rozwiązać równanie równowagi dynamicznej, tzn. równanie ruchu w postaci (5.21). Jest to w istocie układ równań różniczkowych zwyczajnych względem czasu. Do rozwiązania tego układu stosować będziemy wzory rekurencyjne Newmarka w wersji bezwarunkowo stabilnej (6.1). Przyjęto do obliczeń krok całkowania o wartości  $\Delta t = 1 \cdot 10^{-4}$  s. Obciążenie stanowi siła Heaviside'a

$$P(t) = P_0 H(t), \quad (7.16)$$

gdzie

$$H(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ 1 & \text{dla } t \geq 0 \end{cases} \quad (7.17)$$

jest funkcją Heaviside'a. Przyjęto, że amplituda siły  $P_0$  zmienia się procentowo w stosunku do siły krytycznej  $P_{kr} \equiv P_{kr}^S$  wyznaczonej w przypadku statycznego działania siły  $P$  (pkt. 7.2 rozprawy), tzn.  $P_0 \in \langle 5\% P_{kr}^S, 105\% P_{kr}^S \rangle$ ,  $P_{kr}^S = 55,859$  MN.

Zrealizowane zadanie ma głównie na celu sprawdzenie poprawności przyjętego modelu obliczeniowego, a mianowicie:

- Analiza przemieszczeń poprzecznych i podłużnych w zależności od wartości siły  $P_0$ , tj. analiza odnosząca się do oceny jakościowej przemieszczeń w funkcji czasu.
- Analiza amplitud przemieszczeń poprzecznych i podłużnych w zależności od wartości siły  $P_0$ .
- Analiza okresów oraz częstości drgań poprzecznych i podłużnych w zależności od wartości siły  $P_0$ .
- Ustalenie wartości siły krytycznej  $P_{kr}$ .

Na wykresach (rys. 7.5) ÷ (rys. 7.22) przedstawiono wyniki dotyczące analizy przemieszczeń poprzecznych i podłużnych w pręcie w zależności od wartości

siły  $P_0$ . W tabeli 7.2 oraz na wykresie (rys. 7.23) przedstawiono wartości amplitud przemieszczenia poprzecznego pręta w środku rozpiętości dla wyboczenia dynamicznego i statycznego w zależności od wartości siły  $P_0$ . W tabeli 7.2 przedstawiono również wartości amplitud przemieszczeń podłużnych pręta dla obciążenia statycznego i dynamicznego, w miejscu przyłożenia siły (w miejscu podpory przesuwnej), a na wykresie (rys. 7.24) zobrazowano wyniki tych obliczeń. Na podstawie danych z tabeli 7.2 dotyczących długości okresu drgań poprzecznych sporządzono wykres (rys. 7.25) przedstawiający zależność długości okresu drgań poprzecznych pręta od wartości procentowej siły krytycznej statycznej. Na podstawie powyższych obliczeń i analiz można podać następujące syntetyczne wnioski:

- Wraz ze wzrostem wartości siły  $P_0$  zwiększają się wartości amplitud przemieszczeń poprzecznych i podłużnych.
- Z wykresu (rys. 7.23) wynika, że amplitudy przemieszczeń poprzecznych zarówno dla siły działającej statycznie, jak i dynamicznie wprawie mają przebieg prawie liniowy (przy małych wartościach siły ( $P_0 \ll P_{kr}^s$ ), a przy większych siłach  $P_0$  wykres ten przechodzi w formę nieliniową.
- Z wykresu (rys. 7.24) wynika, że przemieszczenia podłużne mają również przebieg prawie liniowy zarówno dla siły działającej statycznie, jak i dynamicznie.
- Wraz ze wzrostem wartości siły  $P_0$  rośnie długość okresu drgań poprzecznych. Przebieg tego wykresu początkowo jest prawie liniowy, natomiast przy większych wartościach siły wykres przechodzi w formę nieliniową.
- Okres drgań podłużnych bez względu na wartość przykładanej siły  $P_0$  ma taką samą długość. Oznacza to, że drgania podłużne mają charakter harmoniczny z amplitudą  $\omega = 1336,85 \frac{rad}{s}$ , czyli okresem  $T = 47 \cdot 10^{-4} s$ . Wynika z tego w przypadku obciążenia pręta siłą Heaviside'a, że drgania podłużne przebiegają z podstawową częstotliwością drgań podłużnych wynoszących (poniższy wzór jest słuszny w przypadku drgań niesprężonych)

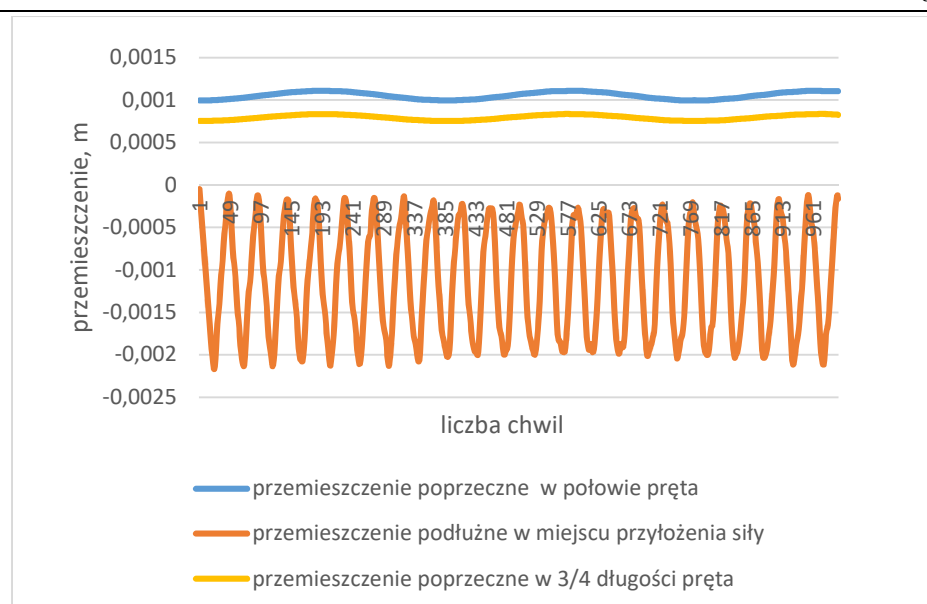
$$\omega = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \frac{\pi}{6} \sqrt{\frac{2,1 \cdot 10^5}{0,078}} = 858,7 \frac{rad}{s}, \quad (7.18)$$

czyli o okresie  $T' = \frac{2\pi}{\omega}$

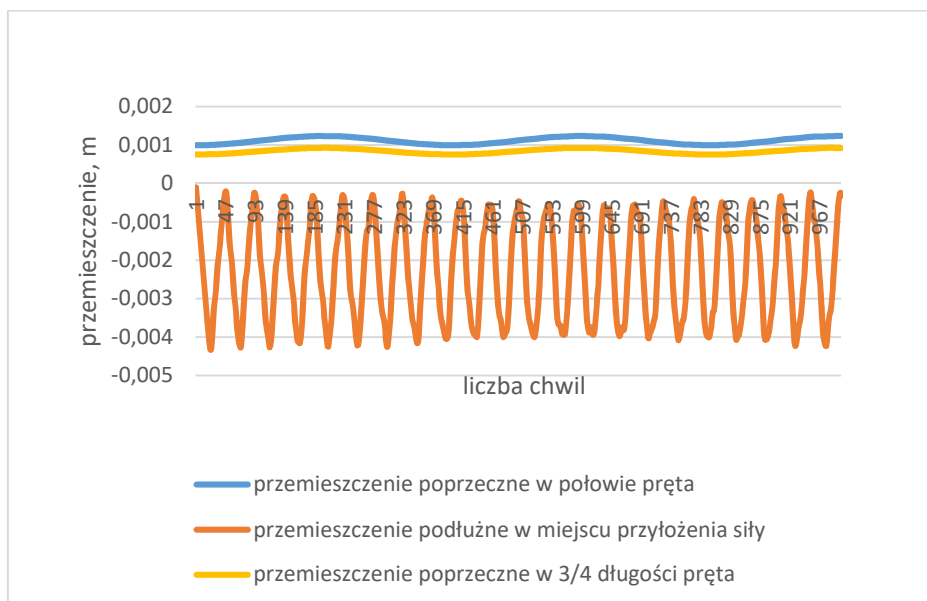
$$T' = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{858,7} = 73,2 \cdot 10^{-4} s. \quad (7.19)$$

Okres drgań odczytany z wykresów (rys. 7.5) ÷ (rys. 7.22) wynosi  $T = 47 \cdot 10^{-4}$  s. Zróżnicowanie tych okresów wynika ze sprzężenia drgań poprzecznych i podłużnych, krzywizny wstępnej  $w_0(x)$  oraz uwzględnienia w modelu obliczeniowym różnego typu nieliniowości geometrycznych, czego nie uwzględnia się we wzorze (7.18).

- Przebieg wykresu dotyczącego wartości amplitud przemieszczeń poprzecznych w zależności od zmieniającej się wartości siły  $P_0$  potwierdza założenia przyjęte w pkt. 6.4 niniejszej rozprawy. W przypadku analizy amplitud przemieszczeń podłużnych zauważono prawie liniową zależność od wartości siły  $P$  (rys. 7.24). To świadczy o dominacji drgań podłużnych nad poprzecznymi. W otoczeniu siły krytycznej następuje załamanie linii prostej (rys. 7.24). Warto jeszcze zwrócić uwagę na kąt  $\beta$  charakteryzujący sprężystość pręta. Przy obciążeniu siłą statyczną kąt  $\beta$  wynosi  $70^\circ$ , a przy obciążeniu dynamicznym  $\beta' = 54^\circ$  (rys. 7.24). Wynika to z tego, że przy obciążeniu dynamicznym siłą Heaviside'a amplituda przemieszczeń jest 2 razy większa od przemieszczeń powstających od statycznego działania takiej samej siły, ale taka prawidłowość zachodzi dla ośrodka geometrycznie liniowego, przy niezależności drgań podłużnych od poprzecznych oraz braku krzywizny wstępnej.
- Analogicznie jak w punkcie 7.2 niniejszej rozprawy, wyznaczono siłę krytyczną przy obciążeniu pręta siłą Heaviside'a wg kryterium (6.9). Wartość siły krytycznej odczytano z wykresu charakteryzującego drgania poprzeczne (rys. 7.23) i wyniosła ona  $P_{kr} = 44,701$  MN, co odpowiada 80% wartości siły krytycznej obliczonej w przypadku obciążenia pręta siłą statyczną. Siłę krytyczną odczytano również z wykresu charakteryzującego drgania podłużne i wyniosła ona  $P_{kr} = 51,390$  MN, co odpowiada 92% wartości siły krytycznej obliczonej w przypadku obciążenia pręta siłą statyczną (rys. 7.24). Z wykresu (rys. 7.25), na którym przedstawiono zależność długości okresu drgań poprzecznych od wartości siły wynika, że  $P_{kr} = 41,894$  MN, co stanowi 75% wartości siły krytycznej obliczonej w przypadku obciążenia pręta siłą statyczną.
- W całym toku obliczeń nadal spełniany był warunek dokładności (6.3).

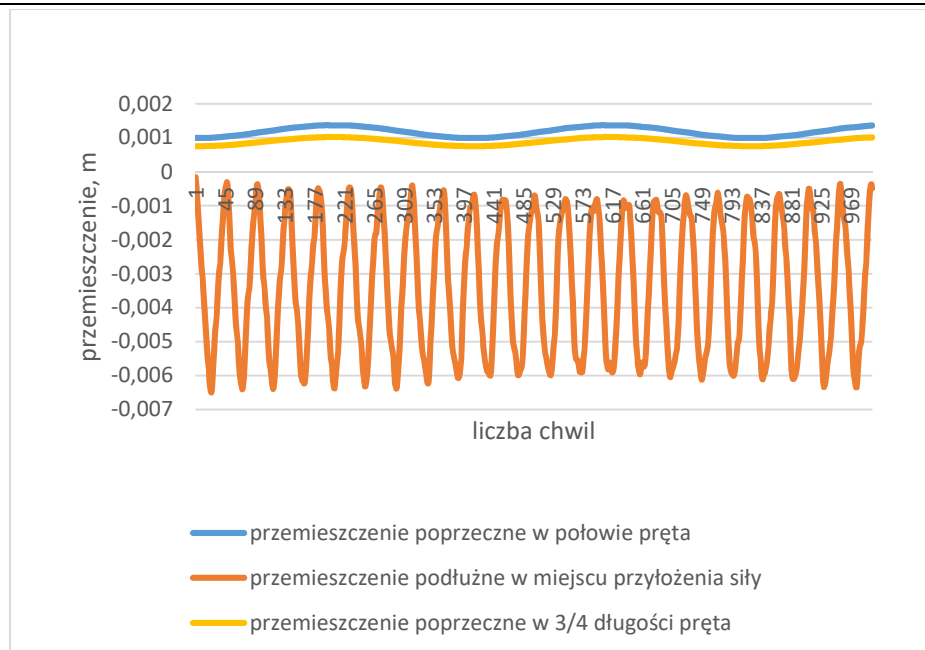


Rys. 7.5. Przemieszczenie przy działaniu siły o wartości równej 5% Pkr = 2,794 MN

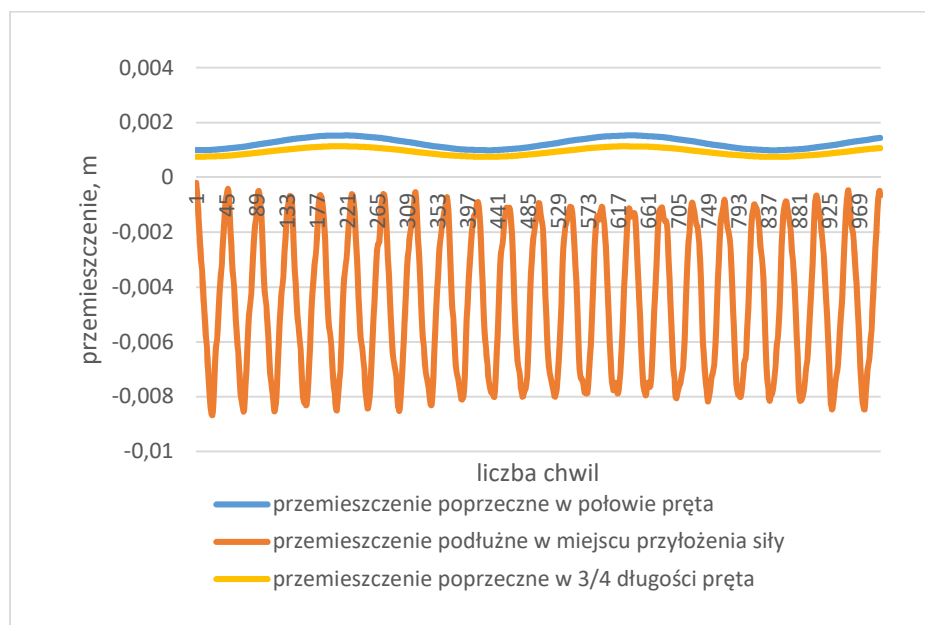


Rys. 7.6. Przemieszczenie przy działaniu siły o wartości równej 10% Pkr = 5,588 MN

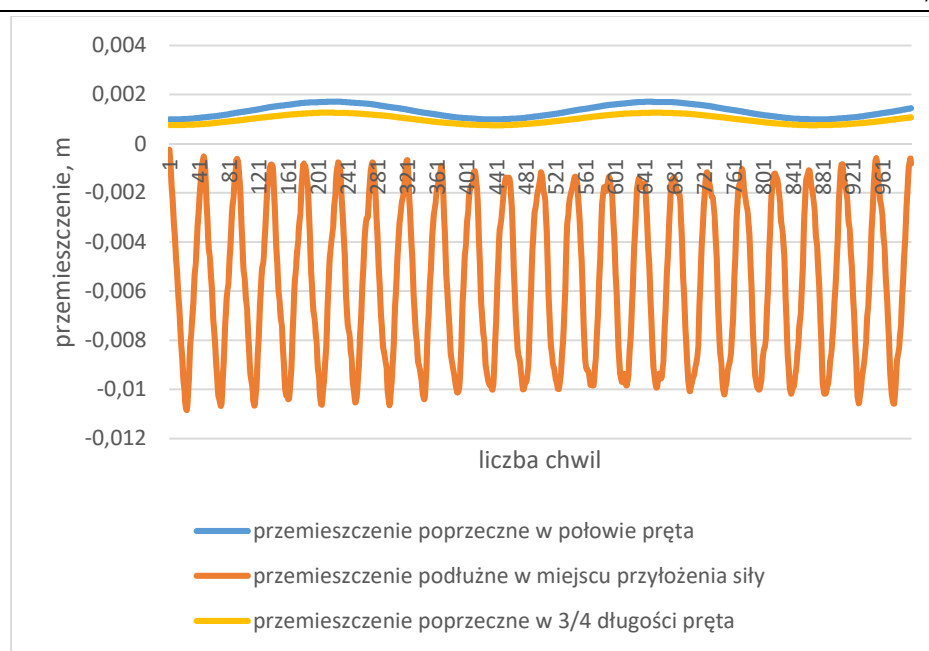
*Model numeryczny wyboczenia dynamicznego prętów z wykorzystaniem metody elementów skończonych*



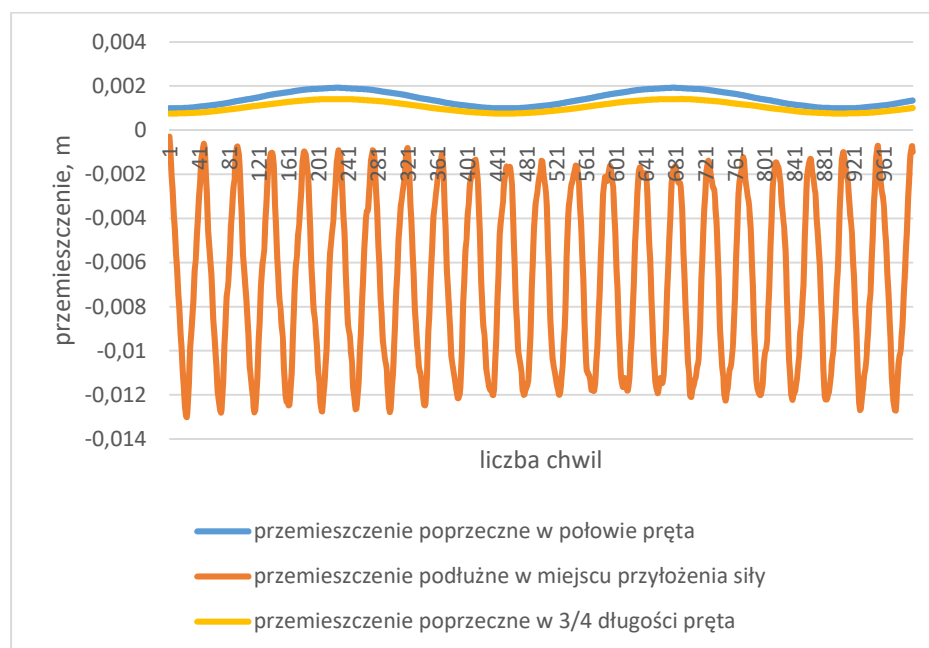
Rys. 7.7. Przemieszczenie przy działaniu siły o wartości równej 15% Pkr = 8,381 MN



Rys. 7.8. Przemieszczenie przy działaniu siły o wartości równej 20% Pkr = 11,175 MN

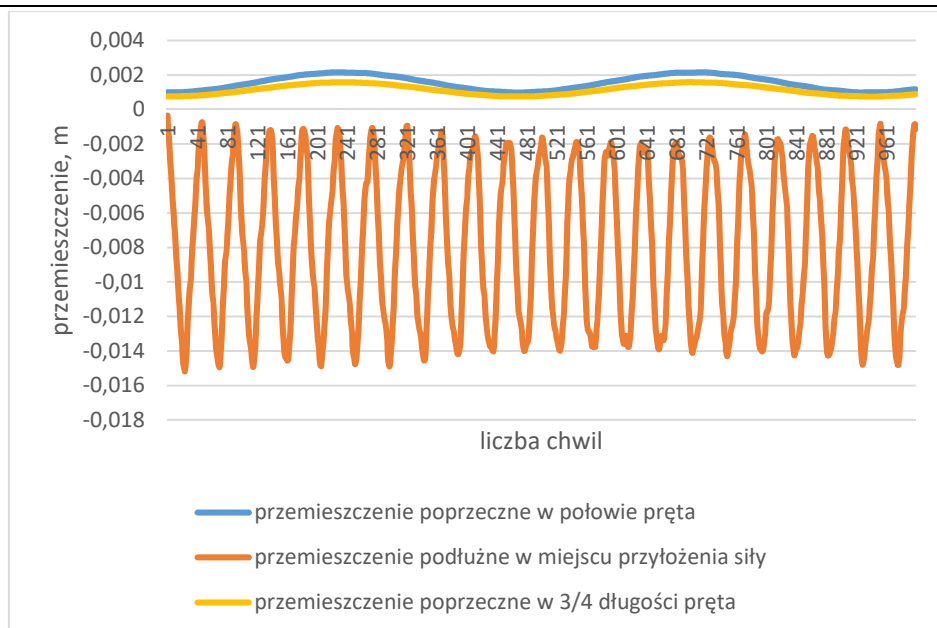


Rys. 7.9. Przemieszczenie przy działaniu siły o wartości równej 25%  $P_{kr} = 13,969$  MN

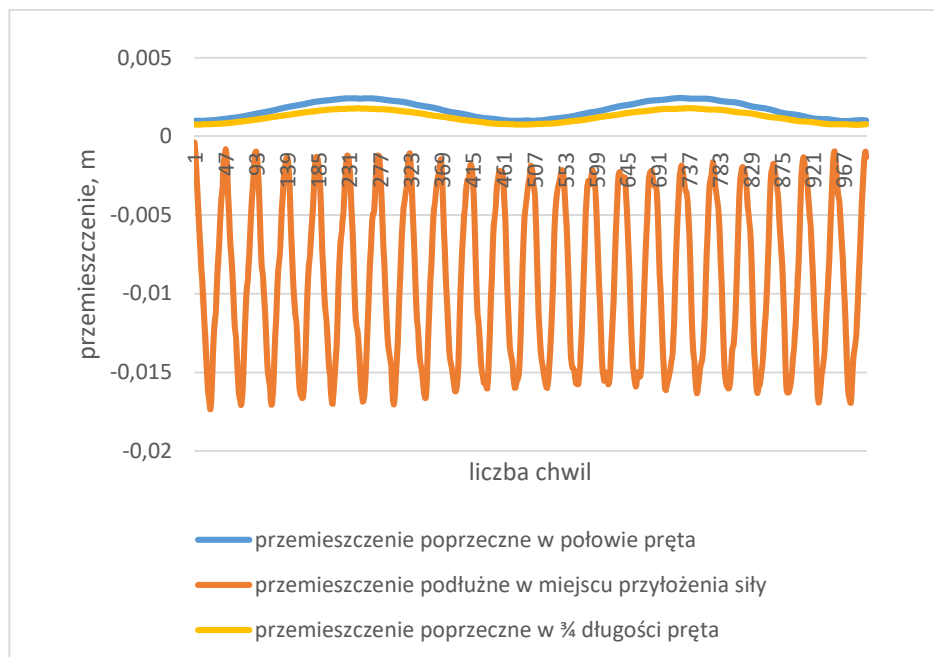


Rys. 7.10. Przemieszczenie przy działaniu siły o wartości równej 30%  $P_{kr} = 16,763$  MN

*Model numeryczny wyboczenia dynamicznego prętów z wykorzystaniem metody elementów skończonych*

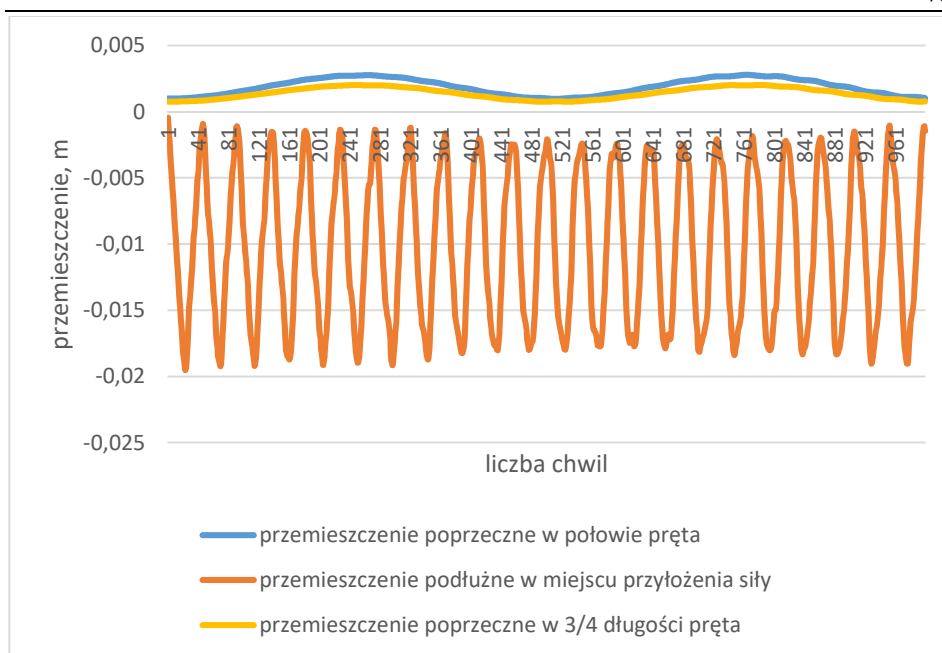


Rys. 7.11. Przemieszczenie przy działaniu siły o wartości równej 35% Pkr = 19,556 MN

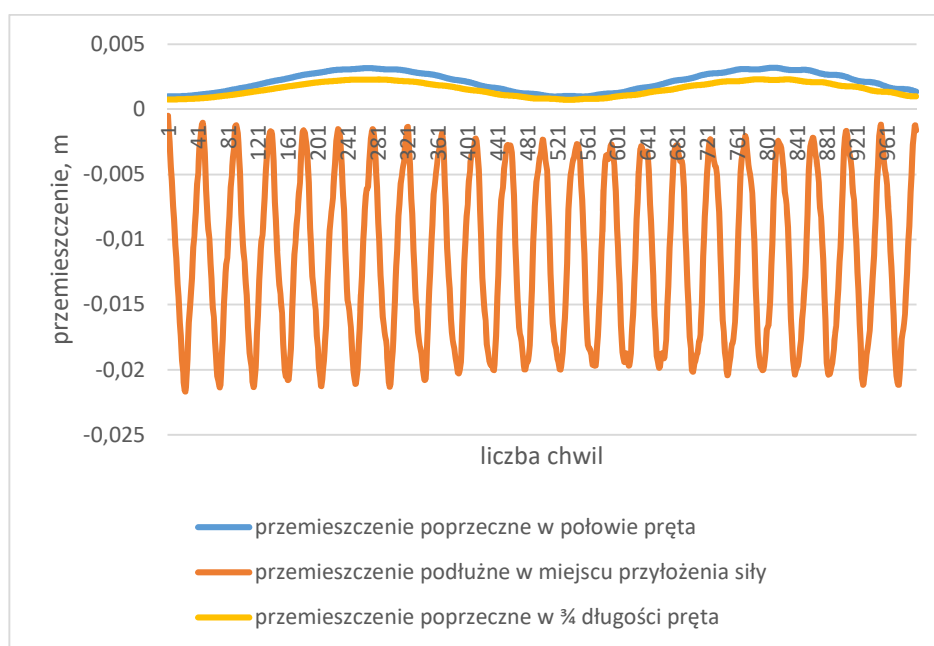


Rys. 7.12. Przemieszczenie przy działaniu siły o wartości równej 40% Pkr = 22,350 MN



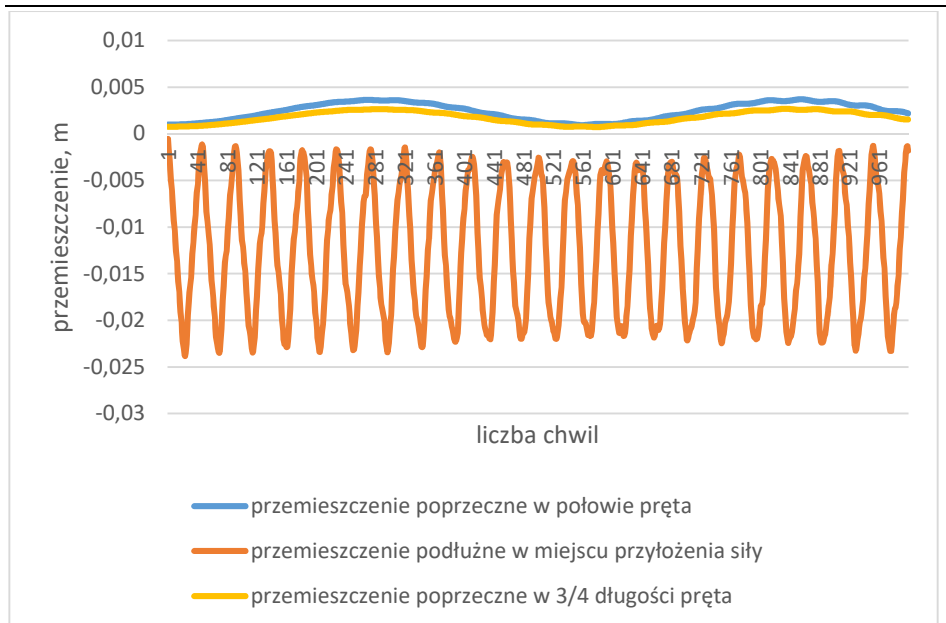


Rys. 7.13. Przemieszczenie przy działaniu siły o wartości równej 45% Pkr = 25,144 MN

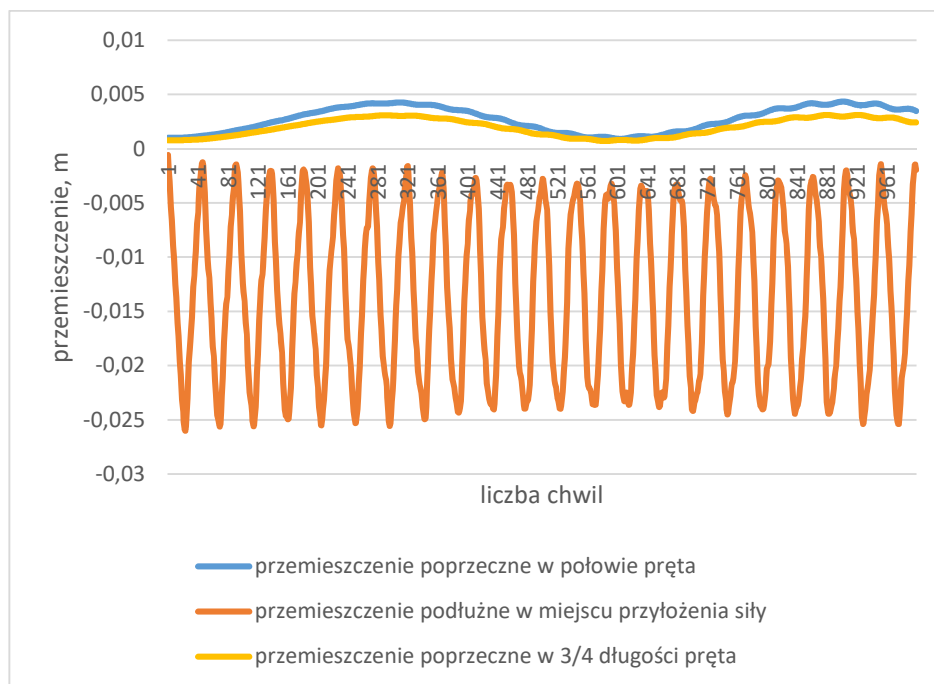


Rys. 7.14. Przemieszczenie przy działaniu siły o wartości równej 50% Pkr = 27,938 MN

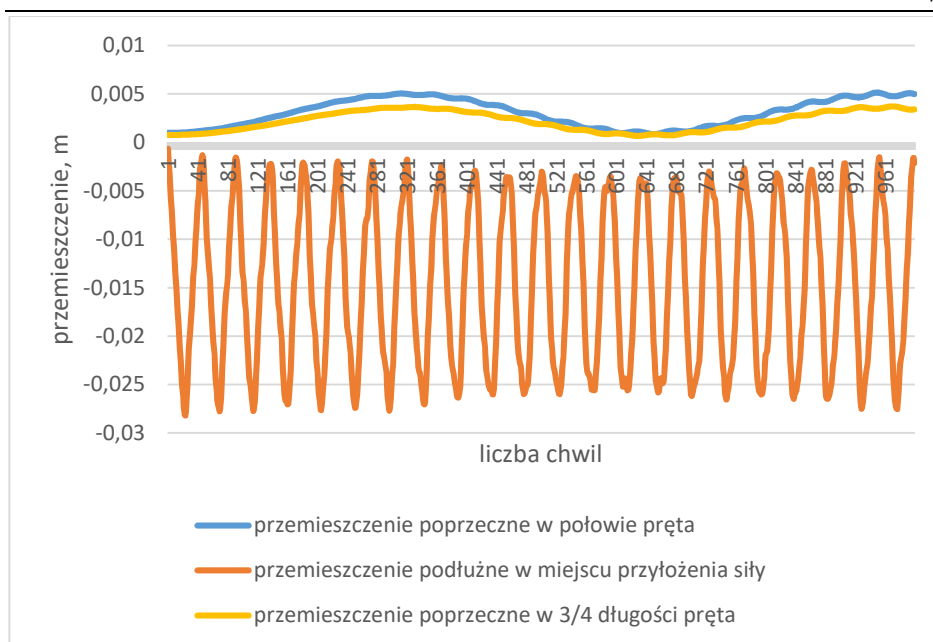
*Model numeryczny wyboczenia dynamicznego prętów z wykorzystaniem metody elementów skończonych*



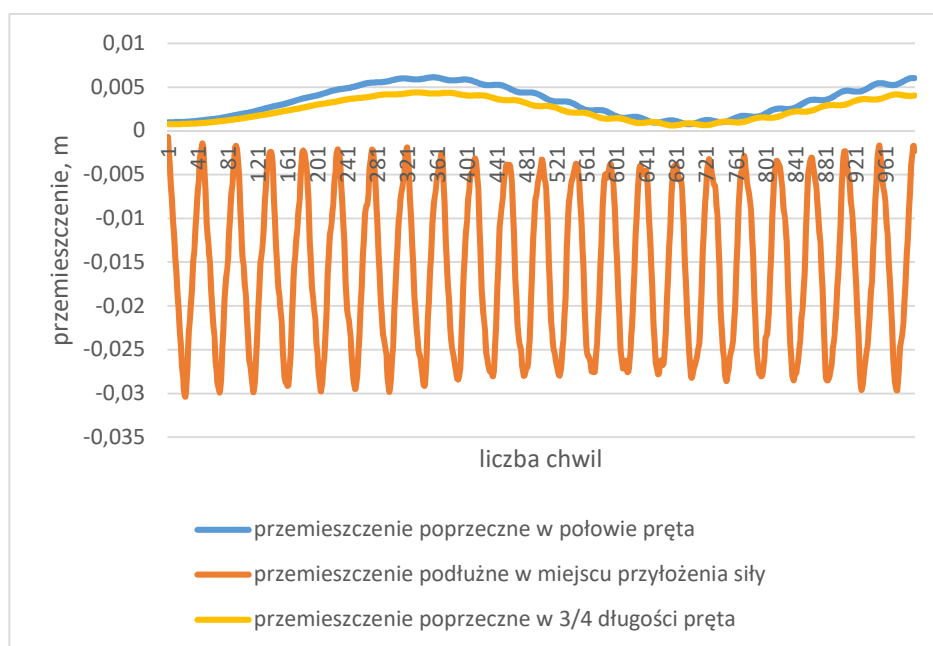
Rys. 7.15. Przemieszczenie przy działaniu siły o wartości równej 55% Pkr = 30,732 MN



Rys. 7.16. Przemieszczenie przy działaniu siły o wartości równej 60% Pkr = 33,523 MN

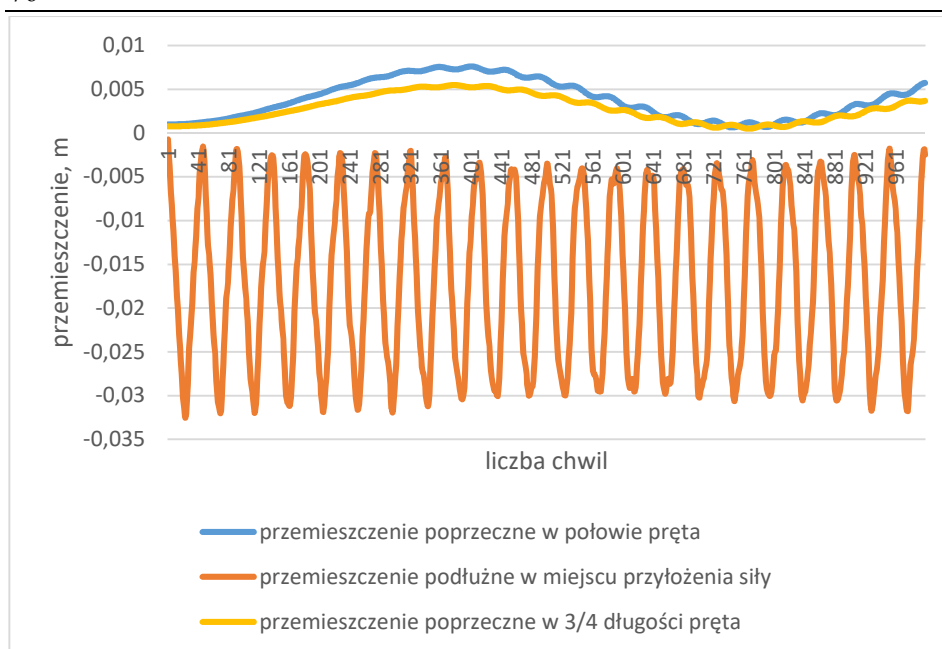


Rys. 7.17. Przemieszczenie przy działaniu siły o wartości równej 65% Pkr = 36,319 MN

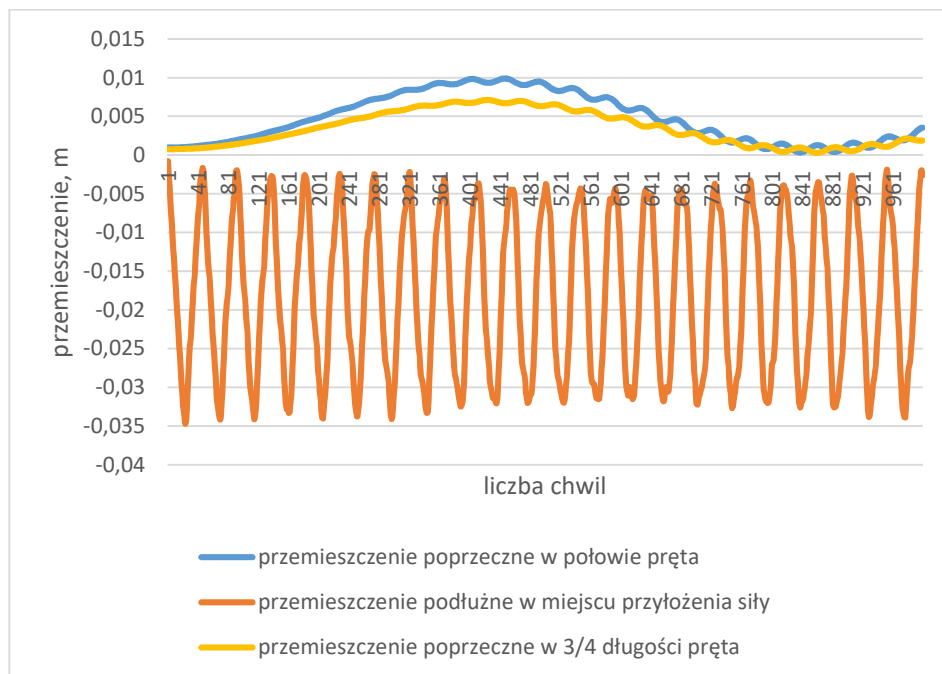


Rys. 7.18. Przemieszczenie przy działaniu siły o wartości równej 70% Pkr = 39,113 MN

*Model numeryczny wyboczenia dynamicznego prętów z wykorzystaniem metody elementów skończonych*

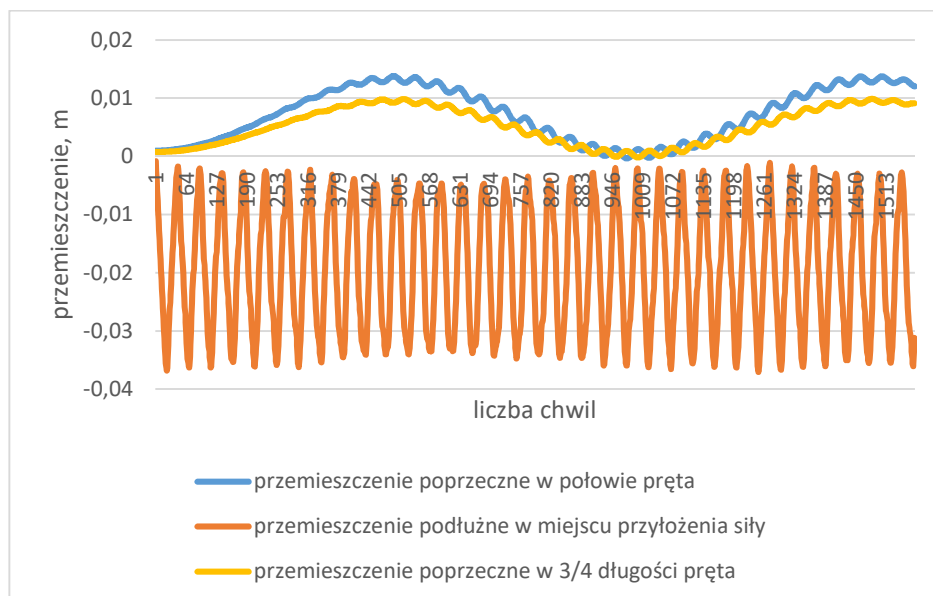


Rys. 7.19. Przemieszczenie przy działaniu siły o wartości równej 75% Pkr = 41,907 MN

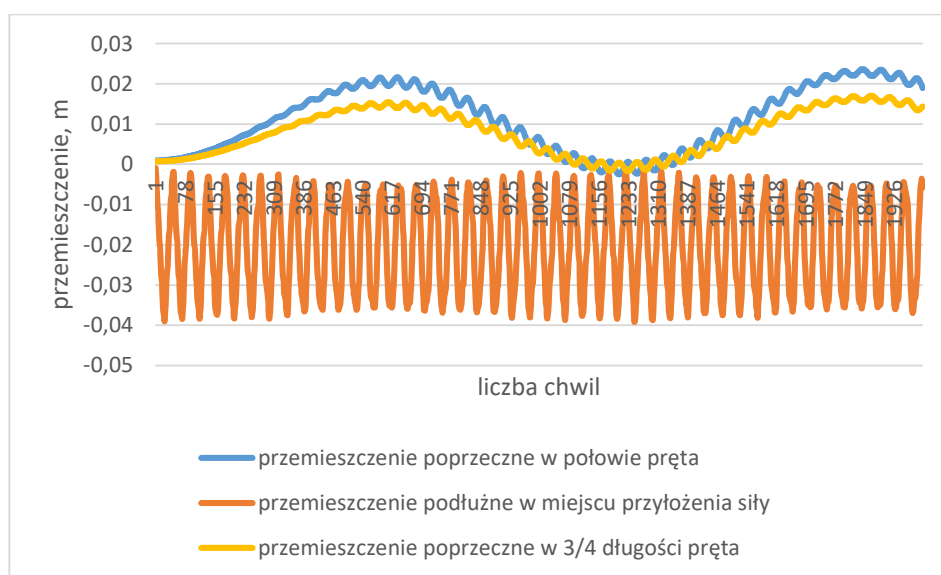


Rys. 7.20. Przemieszczenie przy działaniu siły o wartości równej 80% Pkr = 44,701 MN

*Model numeryczny wyboczenia dynamicznego prętów z wykorzystaniem metody elementów skończonych*



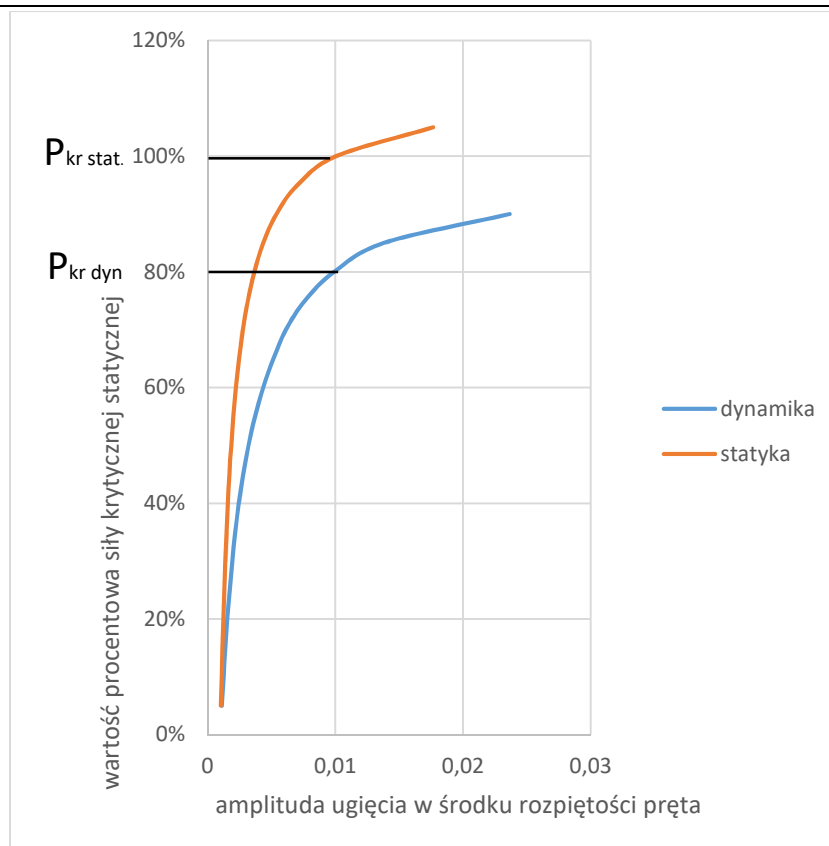
Rys. 7.21. Przemieszczenie przy działaniu siły o wartości równej 85% Pkr = 47,494 MN



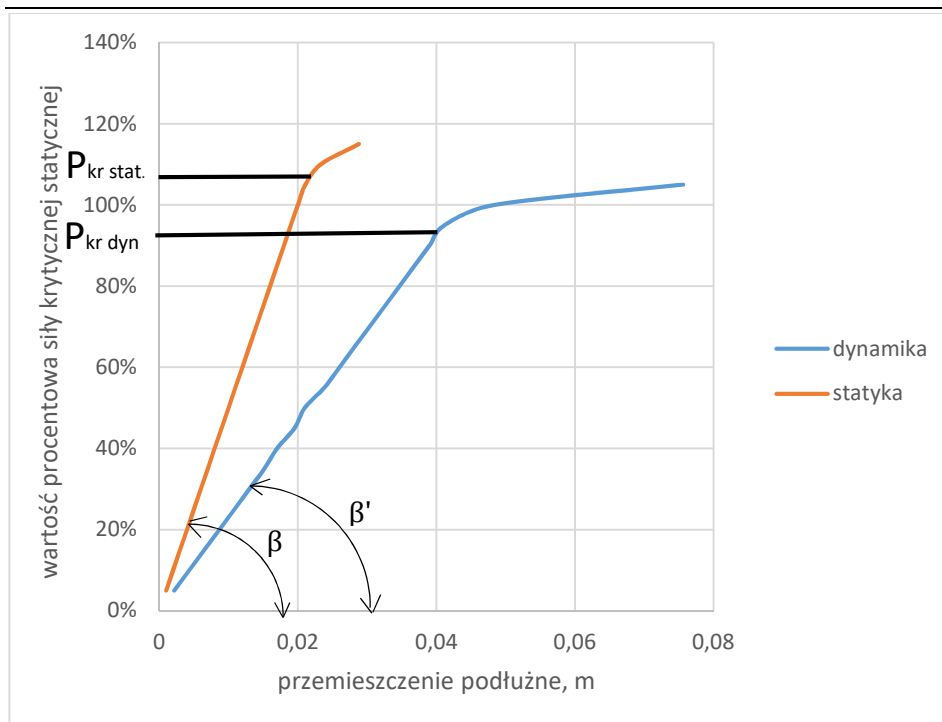
Rys. 7.22. Przemieszczenie przy działaniu siły o wartości równej 90% Pkr = 50,288 MN

Tabela 7.2 Zestawienie wartości amplitud ugięcia pręta w środku rozpiętości dla wyboczenia dynamicznego i statycznego, wartości amplitud przemieszczeń podłużnych oraz okresu drgań poprzecznych

| Wartość procentowa siły krytycznej $P_{kr}^s$ [%] | Amplituda przemieszczenia poprzecznego w środku rozpiętości pręta – siła dynamiczna $\cdot 10^{-3}$ [m] | Okres drgań poprzecznych $\cdot 10^{-4}$ [s] | Amplituda przemieszczenia podłużnego – siła dynamiczna $\cdot 10^{-3}$ [m] | Przemieszczenie poprzeczne w środku rozpiętości pręta – siła statyczna $\cdot 10^{-3}$ [m] | Przemieszczenie podłużne pręta – siła statyczna $\cdot 10^{-3}$ [m] |
|---|---|--|--|--|---|
| 5   | 1,110   | 380  | 2,16   | 1,046  | 0,997   |
| 10  | 1,238   | 400  | 4,33   | 1,100  | 1,995   |
| 15  | 1,372   | 410  | 6,50   | 1,160  | 2,993   |
| 20  | 1,536   | 420  | 8,67   | 1,226  | 3,991   |
| 25  | 1,713   | 440  | 10,84  | 1,300  | 4,989   |
| 30  | 1,921   | 460  | 13,00  | 1,383  | 5,987   |
| 35  | 2,155   | 480  | 15,17  | 1,477  | 6,984   |
| 40  | 2,435   | 490  | 17,00  | 1,584  | 7,982   |
| 45  | 2,784   | 510  | 19,51  | 1,700  | 8,980   |
| 50  | 3,194   | 530  | 21,00  | 1,850  | 9,978   |
| 55  | 3,699   | 550  | 23,84  | 2,019  | 10,977  |
| 60  | 4,339   | 600  | 26,01  | 2,220  | 11,974  |
| 65  | 5,143   | 650  | 28,17  | 2,464  | 12,973  |
| 70  | 6,123   | 700  | 30,34  | 2,768  | 13,971  |
| 75  | 7,603   | 780  | 32,51  | 3,154  | 14,970  |
| 80  | 9,898   | 880  | 34,68  | 3,663  | 15,969  |
| 85  | 13,798  | 1000   | 37,01  | 4,363  | 16,969  |
| 90  | 23,656  | 1250   | 39,14  | 5,388  | 17,971  |
| 95  | 27,990  | 1470   | 41,17  | 7,031  | 18,947  |
| 100   | 39,051  | 1700   | 48,37  | 10,065   | 19,989  |
| 105   | 53,669  | 1920   | 75,62  | 17,661   | 21,070  |

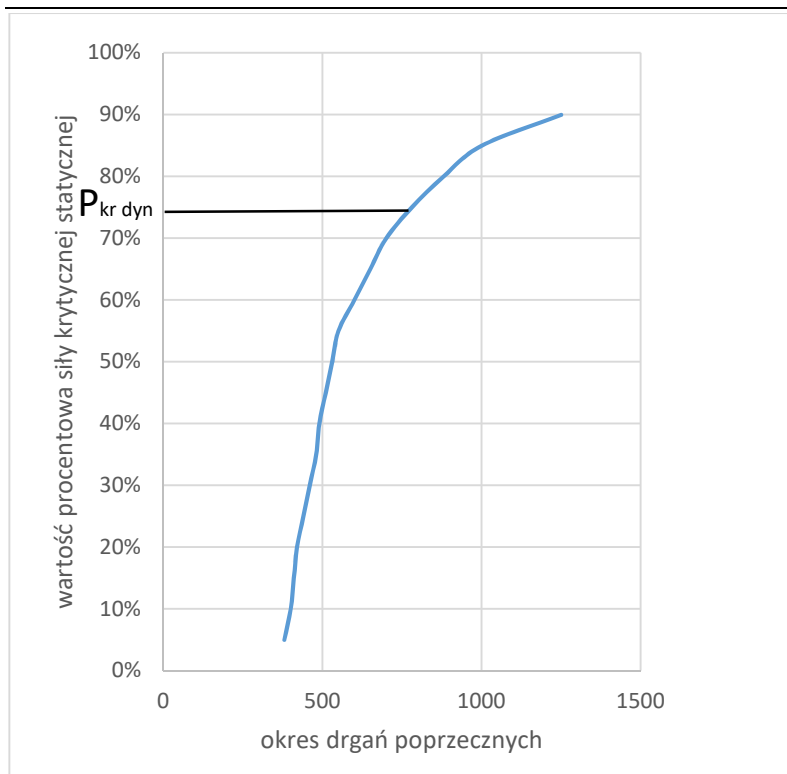


Rys. 7.23. Wartość amplitud przemieszczenia poprzecznego pręta przy obciążeniu siłą Heaviside'a i przemieszczenia poprzecznego pręta przy obciążeniu siłą statyczną w funkcji zmiennej procentowo siły krytycznej statycznej



Rys. 7.24. Wartość amplitud przeszycczenia podłużnego pręta przy obciążeniu siłą Heaviside'a i przeszycczenia poprzecznego pręta przy obciążeniu siłą statyczną w funkcji zmiennej procentowo siły krytycznej statycznej





Rys. 7.25. Długość okresu drgań poprzecznych pręta w zależności od wartości procentowej siły krytycznej

#### 7.4. WYZNACZENIE SIŁY KRYTYCZNEJ PRZY OBCIĄŻENIU HARMONICZNYM

Zadanie poniższe różni się od zadania przedstawionego w pkt. 7.3 innym typem obciążenia  $P(t)$ . Pręt obciąża się siłą harmoniczną w postaci

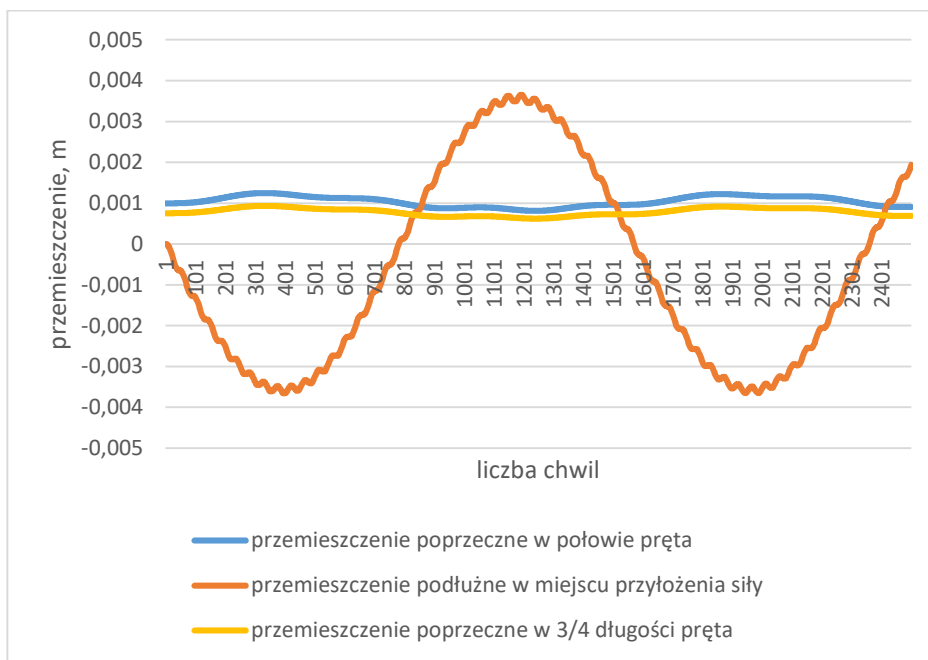
$$P(t) = P_0 \sin \omega t \quad (7.20)$$

gdzie  $\omega$  oznacza częstość siły wymuszającej. Przyjęto do obliczeń  $\omega = 40 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  oraz zmieniającą się wartość siły wymuszającej  $P_0$ . Obliczenia wykonano dla 2500 chwil przy  $\Delta t = 1 \cdot 10^{-4} \text{s}$ . Przeszyczenia poprzeczne i podłużne zobrazowano na wykresach (rys. 7.26) ÷ (rys. 7.40). Można podać następujące syntetyczne wnioski wynikające z otrzymanych przebiegów przemieszczeń w czasie:

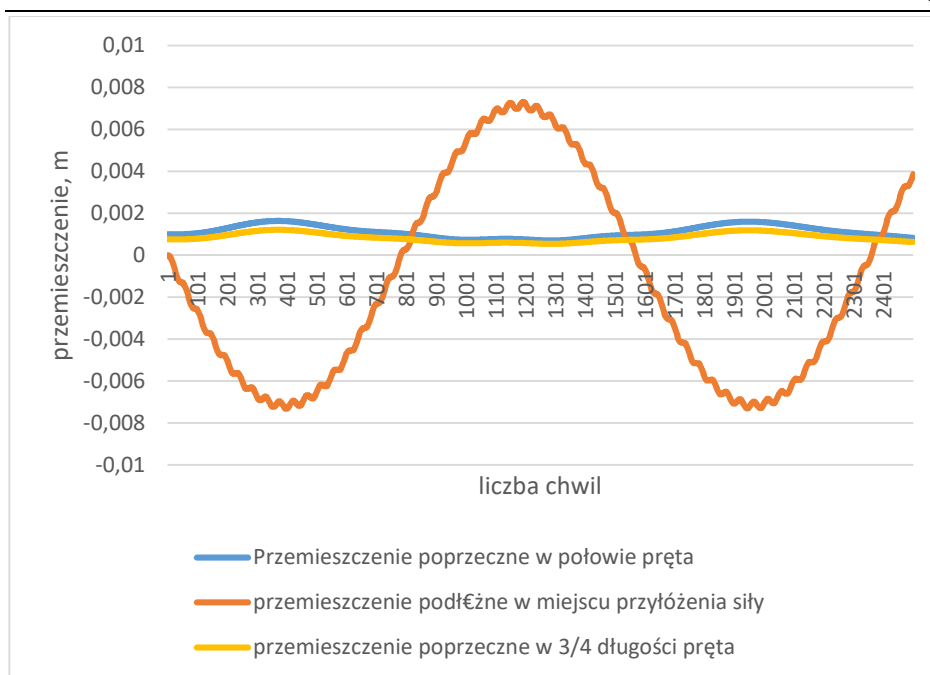
- Przy mniejszych wartościach amplitudy siły wymuszającej  $P_0$  dominują drgania podłużne odbywające się z częstością siły wymuszającej

$\omega = 40 \frac{rad}{s}$ , o okresie  $T = 0,157$  s, a drgania poprzeczne są niewielkie (o bardzo małych amplitudach). Z wykresów (rys. 7.26) ÷ (rys. 7.40) odczytano okres drgań podłużnych  $T = 0,150$  s, co potwierdza prawidłowość wnioskowania o dominacji drgań podłużnych. Przy zwiększającej się sile  $P_0$  drgania podłużne nadal zachowują wcześniejszy charakter, a drgania poprzeczne są coraz bardziej zauważalne. Należy dodać, że amplitudy drgań poprzecznych są zmienne. Ze wzrostem siły  $P_0$  zwiększają się istotnie amplitudy drgań poprzecznych, a maleją amplitudy drgań podłużnych, nawet przy pewnej sile  $P_0$  zaczynają dominować drgania poprzeczne.

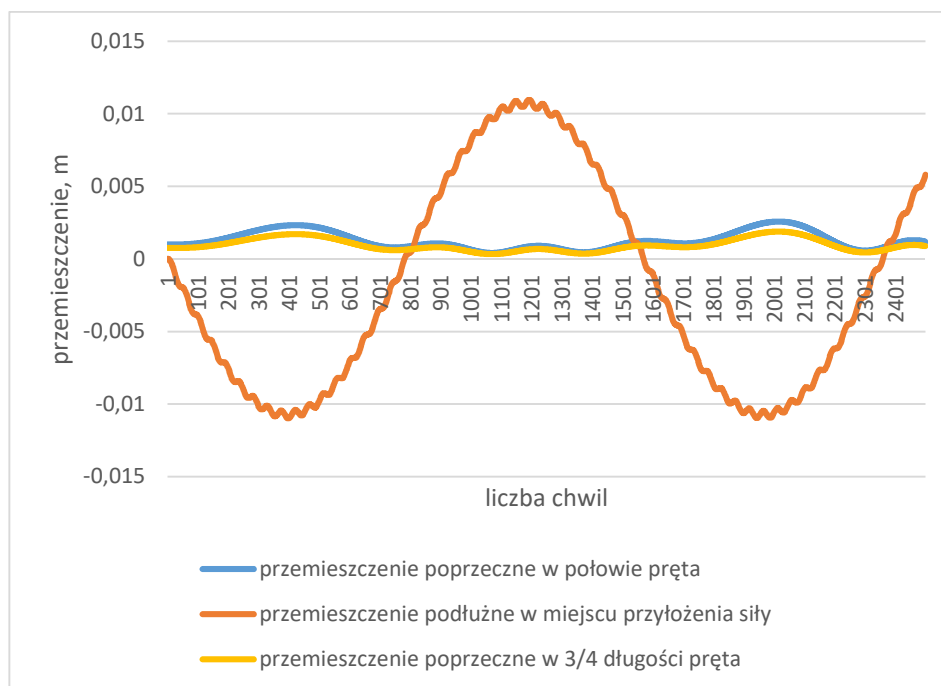
- Należy przypuszczać, że przy pewnej wartości siły  $P_0$  nastąpi gwałtowny przyrost amplitudy drgań poprzecznych. Na podstawie pogłębionej analizy należałoby ustalić przede wszystkim  $P_{0kr}$ .



Rys. 7.26. Przemieszczenie przy działaniu siły o wartości równej 10 MN

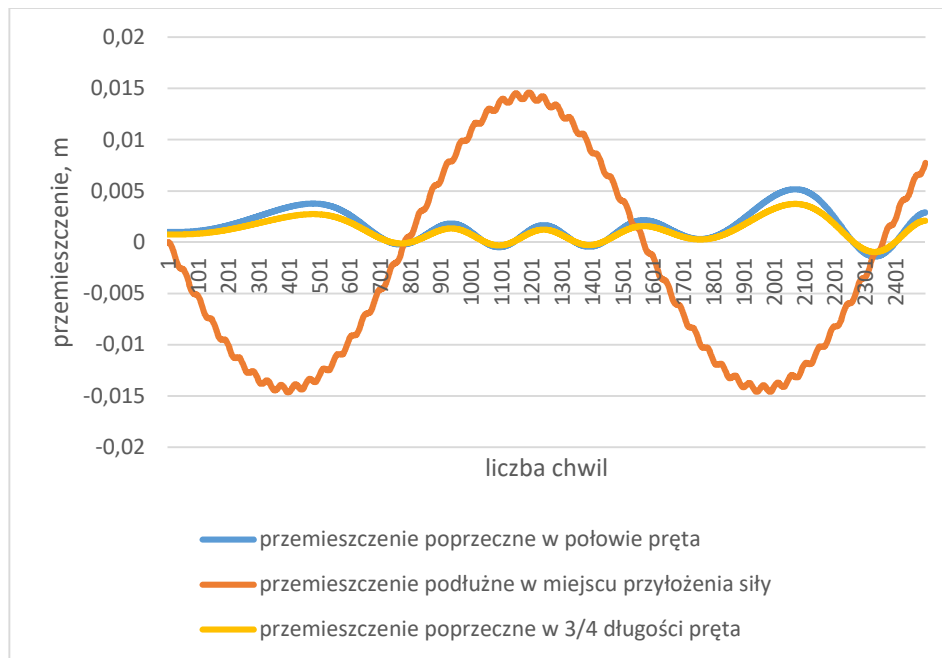


Rys. 7.27.. Przemieszczenie przy działaniu siły o wartości równej 20 MN

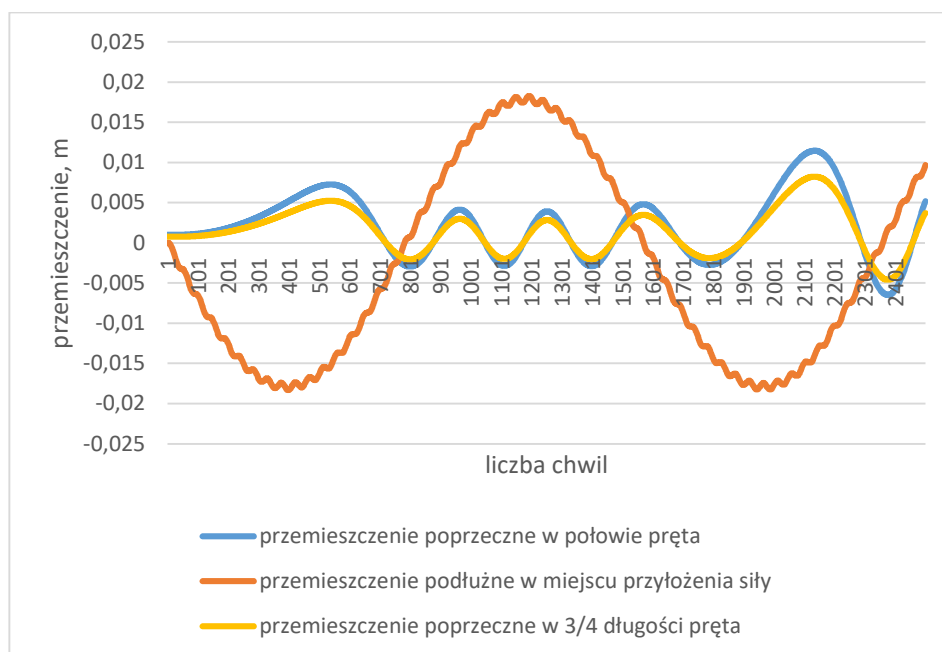


Rys. 7.28. Przemieszczenie przy działaniu siły o wartości równej 30 MN

*Model numeryczny wyboczenia dynamicznego prętów z wykorzystaniem metody elementów skończonych*

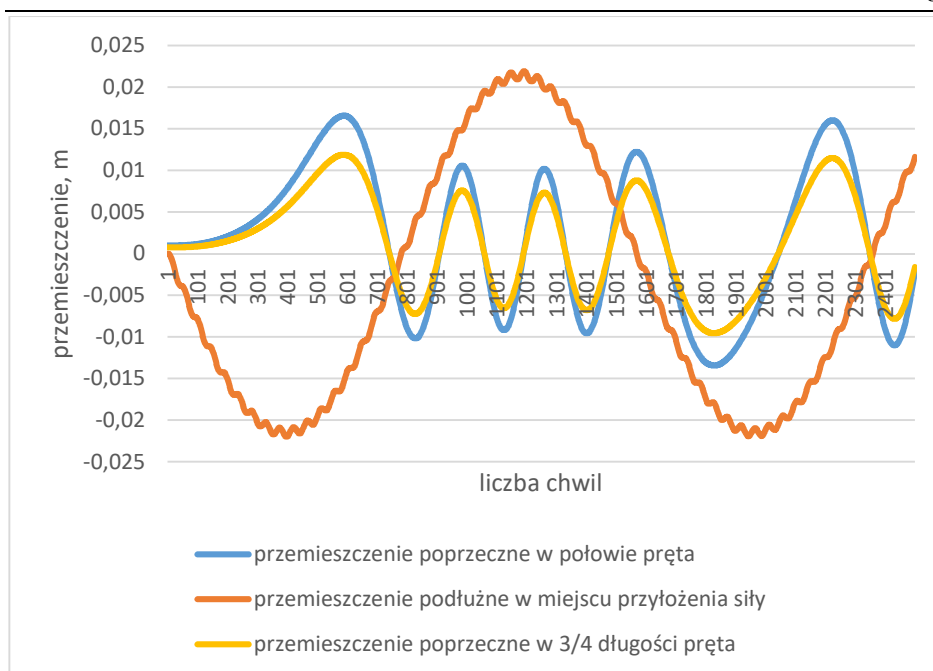


Rys. 7.29. Przemieszczenie przy działaniu siły o wartości równej 40 MN

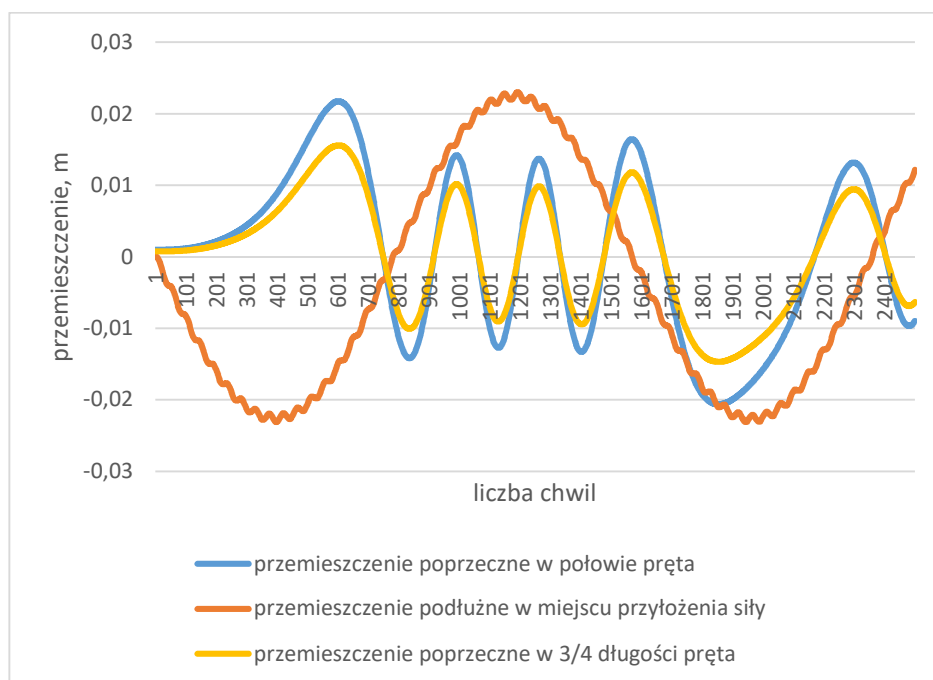


Rys. 7.30. Przemieszczenie przy działaniu siły o wartości równej 50 MN

*Model numeryczny wyboczenia dynamicznego prętów z wykorzystaniem metody elementów skończonych*

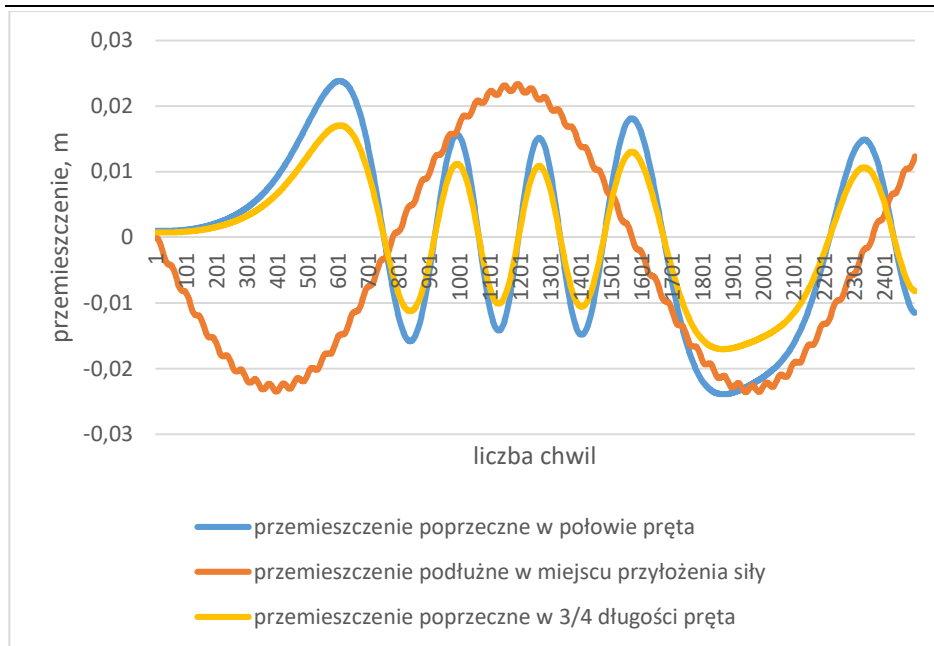


Rys. 7.31. Przeszyczenie przy działaniu siły o wartości równej 60 MN

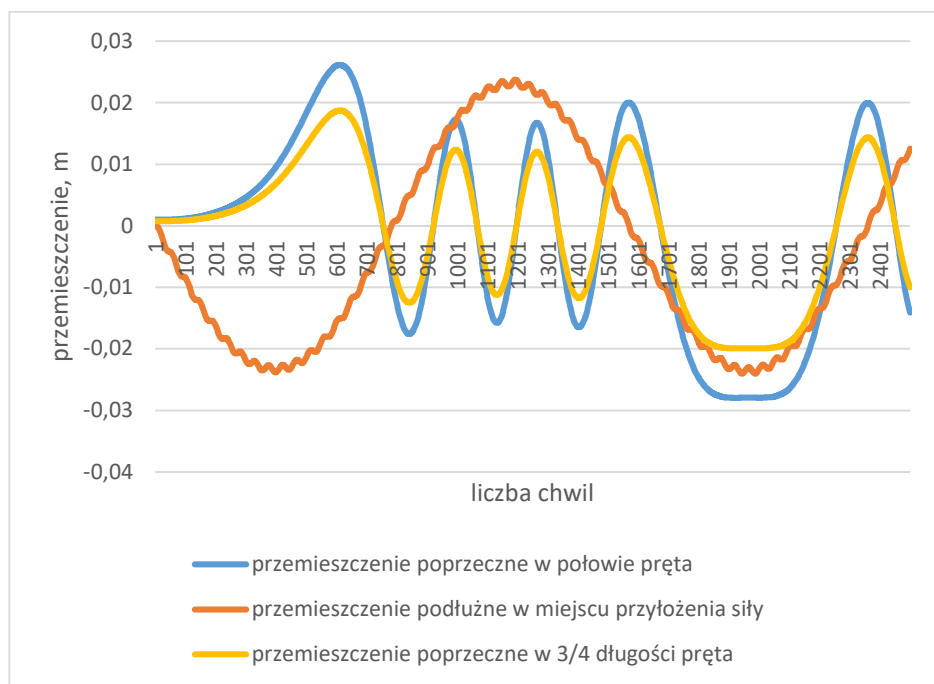


Rys. 7.32. Przeszyczenie przy działaniu siły o wartości równej 63 MN

*Model numeryczny wyboczenia dynamicznego prętów z wykorzystaniem metody elementów skończonych*

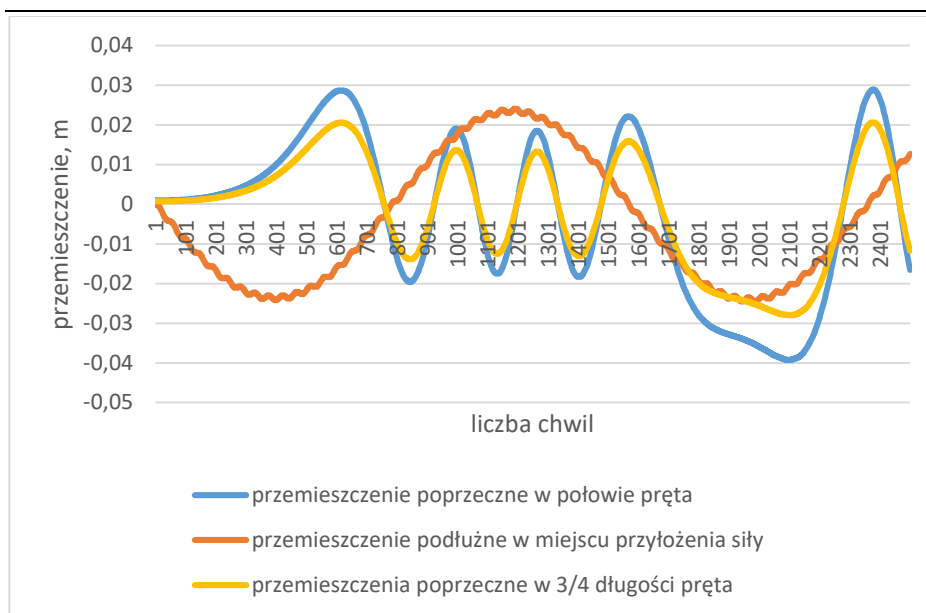


Rys. 7.33. Przemieszczenie przy działaniu siły o wartości równej 64 MN

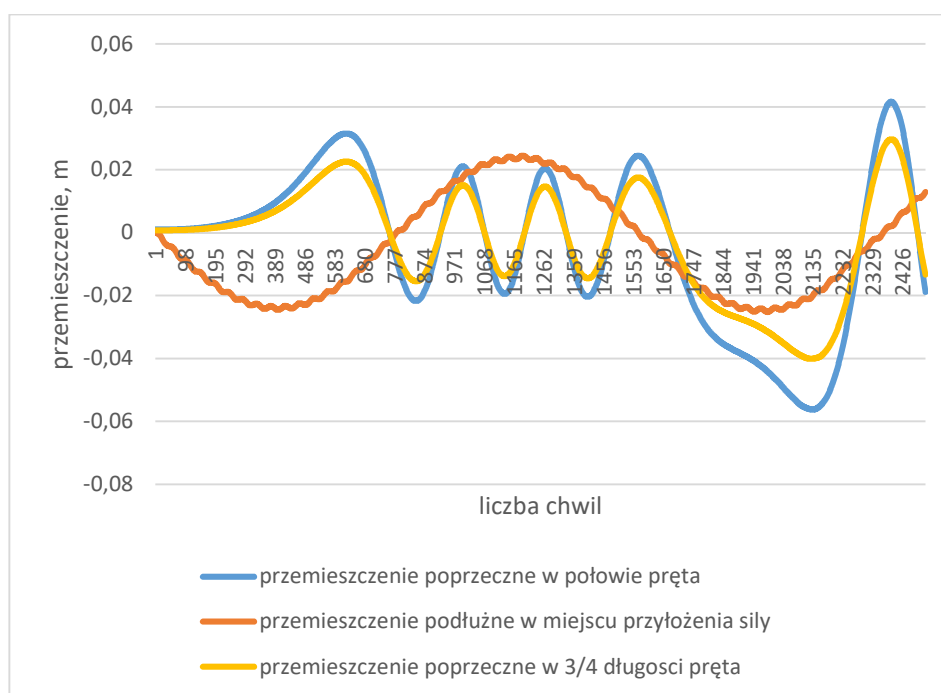


Rys. 7.34. Przemieszczenie przy działaniu siły o wartości równej 65 MN

*Model numeryczny wyboczenia dynamicznego prętów z wykorzystaniem metody elementów skończonych*

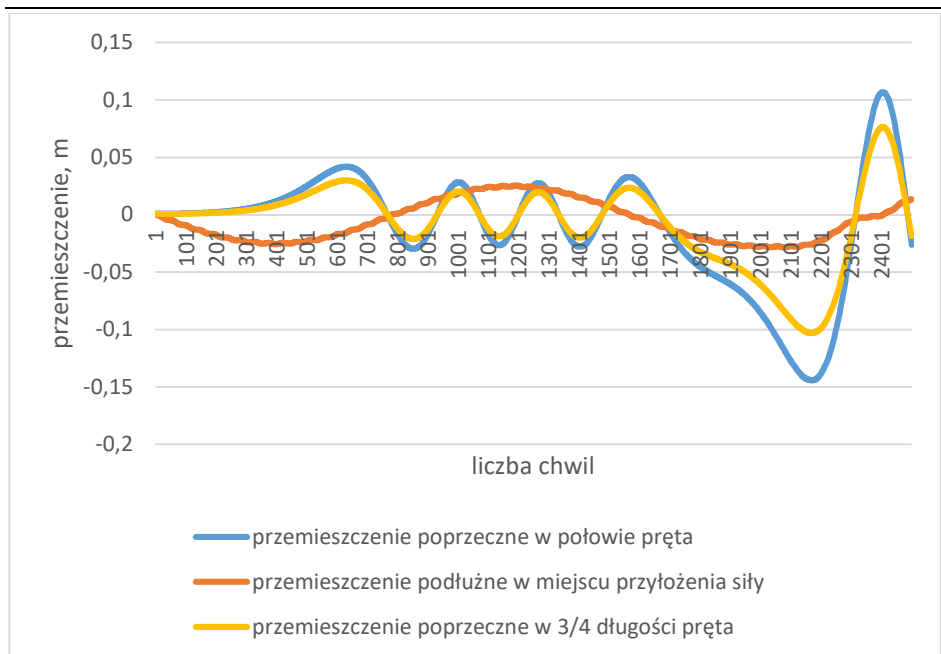


Rys. 7.35. Przemieszczenie przy działaniu siły o wartości równej 66 MN

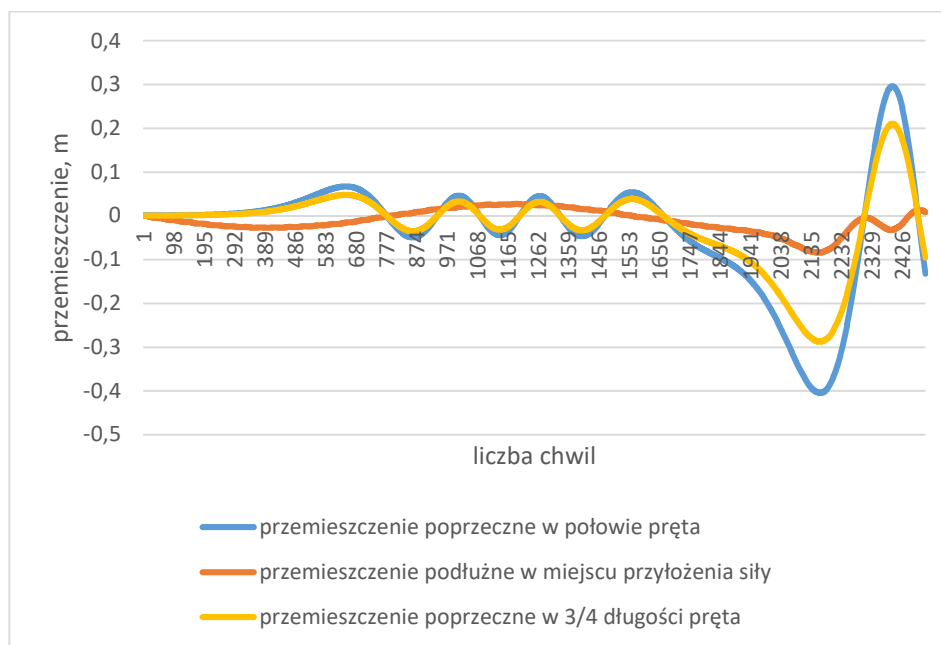


Rys. 7.36. Przemieszczenie przy działaniu siły o wartości równej 67 MN

*Model numeryczny wyboczenia dynamicznego prętów z wykorzystaniem metody elementów skończonych*



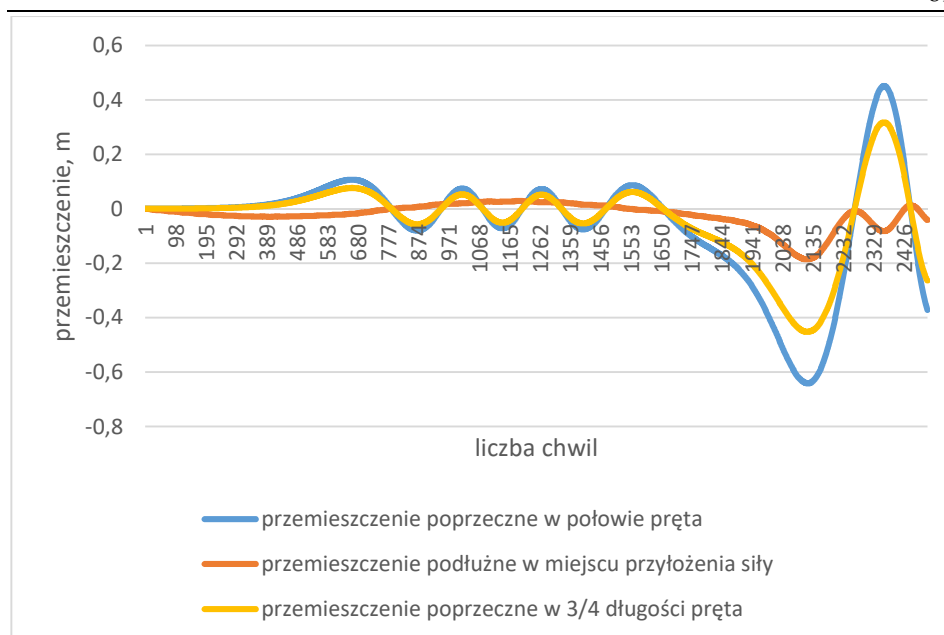
Rys. 7.37. Przemieszczenie przy działaniu siły o wartości równej 70 MN



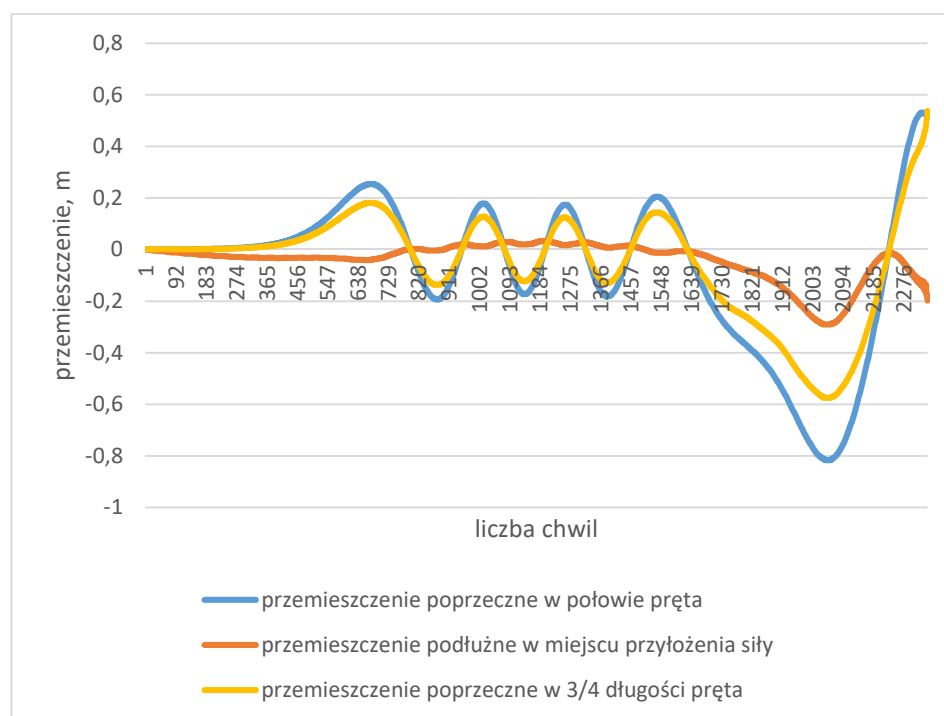
Rys. 7.38. Przemieszczenie przy działaniu siły o wartości równej 75 MN

*Model numeryczny wyboczenia dynamicznego prętów z wykorzystaniem metody elementów skończonych*





Rys. 7.39. Przemieszczenie przy działaniu siły o wartości równej 80 MN



Rys. 7.40. Przemieszczenie przy działaniu siły o wartości równej 90 MN

*Model numeryczny wyboczenia dynamicznego prętów z wykorzystaniem metody elementów skończonych*

---

## 8. WNIOSKI KOŃCOWE

1. Przedmiotem rozprawy było wyboczenie dynamiczne prętów wstępnie zakrzywionych, obciążonych siłą ściskającą zmienną w czasie  $P(t)$ . W formułowaniu równań opisujących takie zagadnienie początkowo-brzegowe uwzględniono zaawansowane nieliniowości geometryczne takich prętów.
2. Celem rozprawy było opracowanie efektywnego, numerycznego modelu obliczeniowego wyboczenia prętów przy obciążeniu dynamicznym siłą ściskającą. Cel pracy w istocie korespondował z tezą pracy: „*Możliwe jest uzyskanie efektywnego rozwiązania zagadnienia początkowo-brzegowego wyboczenia dynamicznego prętów z wykorzystaniem metody elementów skończonych i metod bezpośredniego całkowania równań ruchu*”.
3. W zakres rozprawy wchodziła w szczególności następująca problematyka:
  - wprowadzenie do tematyki stateczności oraz studia literaturowe dotyczące modelowania fizycznego i matematycznego stateczności prętów;
  - sformułowanie początkowo-brzegowe wyboczenia prętów;
  - sformułowanie równania ruchu w metodzie elementów skończonych z wykorzystaniem metody bezpośredniego całkowania równań ruchu (metodą Newmarka);
  - opis przyjętego modelu obliczeniowego z wymaganymi założeniami,
  - przykłady obliczeń z analizą;
  - wnioski końcowe.
4. Cel pracy został osiągnięty, a teza badawcza udowodniona, ponieważ:
  - sformułowano zagadnienie początkowo-brzegowe wyboczenia dynamicznego prętów w postaci układu równań różniczkowych cząstkowych i następnie równania pracy wirtualnej;
  - sformułowane zagadnienie początkowo-brzegowe rozwiązano metodami numerycznymi, tj. metodą elementów skończonych (MES) i metodą bezpośredniego całkowania równań ruchu – metodą Newmarka;
  - zaproponowano algorytm obliczeń, czyli w istocie stworzono model obliczeniowy i następnie opracowano program komputerowy służący do walidacji tego modelu;
  - w ramach walidacji modelu obliczeniowego wykonano i przeanalizowano kilka przykładów; rezultaty walidacji wypadły pozytywnie.
5. Znaczenie naukowe zrealizowanego zadania badawczego:
  - Wyboczenie prętów z imperfekcjami (krzywizna wstępna, mimośrodowe przyłożenie siły), zaawansowane nieliniowości geome-

- 
- tryczne, zmienna w czasie siła ściskająca, powodują, że otrzymujemy nieliniowe równania różniczkowe (cząstkowe). Rozwiązanie takiego problemu naukowo-badawczego jest złożone i trudne. Zwykle w takim przypadku dokonuje się pewnych uproszczeń równań. W niniejszej rozprawie zrezygnowano z takich uproszczeń.
- Do rozwiązania zagadnienia początkowo-brzegowego użyto metody elementów skończonych (MES) i następnie bezpośredniej metody całkowania równań ruchu, metody Newmarka. W ten sposób rozwiązanie układu równań różniczkowych zwyczajnych (sprzężonych) sprowadzono do procesu rekurencyjnego. Problem tutaj polegał na tym, że równania rekurencyjne to równania algebraicznie nieliniowe. W związku z tym pojawiły się następujące problemy:
    - problem wyboru i opracowania metody iteracyjnej rozwiązywania równań rekurencyjnych;
    - problem dokładności rozwiązywania równań rekurencyjnych;
    - problem zbieżności przyjętej metody iteracyjnej.
  - Oddzielnym, podstawowym i najważniejszym problemem było przyjęcie kryterium utraty stateczności pręta. W ogólności wiadomo, że utrata stateczności przy dynamicznym działaniu siły może nastąpić w przypadku działania na pręt siły krytycznej przy ustalonej częstości wymuszenia lub przy częstości krytycznej i ustalonej wartości siły  $P$ . W rozprawie przyjęto i zdefiniowano umowną siłę krytyczną.
6. Znaczenie praktyczne rozważanego w rozprawie problemu naukowego:
- Stateczność prętów jest ważnym zagadnieniem praktycznym budownictwa (i nie tylko) przy projektowaniu, np. słupów obiektów budowlanych, ściskanych prętów kratownicy. Z imperfekcjami w elementach konstrukcyjnych zawsze mamy do czynienia, stąd w tworzonych modelach obliczeniowych i projektowych należy niezamierzone mankamenty koniecznie uwzględnić.
  - W wielu obiektach budowlanych mamy bardzo często do czynienia z obciążeniami dynamicznymi (np. w konstrukcjach mostów, masztów) i na pewno zawsze wystąpi problem stateczności wybranych elementów konstrukcyjnych. Przy dynamicznych obciążeniach, przy imperfekcjach, duże znaczenie mogą mieć różnego rodzaju nieliniowości geometryczne (np. wpływ ścinania, nieliniowości wyższego rzędu), stąd w takim przypadku należy stosować bardziej zaawansowane modele obliczeniowe. Taką udaną próbę podjęto w niniejszej rozprawie.
7. Wskazania/zalecenia autorki odnoszące się do dalszych badań i analiz dotyczące stateczności przy dynamicznych obciążeniach:

- Wskazane są dalsze pogłębione analizy prętów poddanych zwłaszcza harmonicznym obciążeniom przy stosowaniu modelu obliczeniowego przedstawionego w niniejszej rozprawie.
- Wskazane jest, aby opracowany model obliczeniowy wzbogacić o wyboczenie niesprężyste.

---

## LITERATURA

Abrahamson G.R., Goodier J.N., 1966, Dynamic flexural buckling of rods within an axial plastic compression wave, Journ. of Appl. Mech., Trans. ASME E 33, 2, 241-247,

Akgöz, B., 2019, Static stability analysis of axially functionally graded tapered micro columns with different boundary conditions, Steel and Composite Structures, 33(1), pp. 965-974

Banaś W., Kost G., Nierychłok A., 2011. Badanie hybrydowego układu napędowego wg stabilności Lapunowa. Wybrane Problemy Inżynierskie 2, 23-28.

Bayley C.D., 1975. A new look at Hamilton's principle, Foundations of Physics 3 (5), pp. 433-451

Bazant, Z.P., Cedolin, Z.P., 2010. Stability of Structures: Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories. World Scientific Publishing

Biegus, A., 1997, Nośność graniczna stalowych konstrukcji prętowych.

Bielajew N.M., 1954, Wytrzymałość materiałów, Wydawnictwo MON, Warszawa 1954, rozdz. część IX.

Bodnar, A., 2004, Wytrzymałość Materiałów. Osiowe rozciąganie i ściskanie.

Bodnar, A., 2004, Wytrzymałość Materiałów. Stateczność osiowo ściskanych prętów prostych.

Bołotin W. W., 1956, Dinamiczeskaja ustoičziwost' uprugich sistem, GITTL, Moskwa 1956

Boscato G., Ientile S., 2018, Experimental and numerical investigation on dynamic properties of thin-walled GFRP buckled columns, Composite Structures 189:273-285

Brzoska Z., 1961, Statyka i stateczność konstrukcji prętowych i cienkościenny

- 
- Budiansky, B., 1974. Theory of buckling and post-buckling behavior of elastic structures. Adv. Appl. Mech. 14, 1–65 ch, PWN Warszawa
- Brzuzy A, Bąk G., 2018, Analiza stateczności prętów stalowych poddanych działaniu obciążenia uderzeniowego. Biuletyn Wojskowej Akademii Technicznej. 2018;67:107-125
- Calladine, C., 1973, Inelastic buckling of columns - Effect of imperfections. Int. J. Mech. Sci
- Chandrashekhara K., Bhatia K., 1993, Active buckling control of smart composite plates-finite-element analysis, Smart Materials and Structures, Volume 2, Number 1
- Chmielewski T., Zembaty Z., 1998, Podstawy dynamiki budowli, Wydanie I, Warszawa Arkady
- Deng J., Kanwar N. S., Pandey M. D., Xie W., 2019, Dynamic buckling mechanism of pillar rockbursts induced by stress waves, Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering, Volume 11, Issue 5, October 2019, Pages 944-953
- Djermane M., Zaoui D., Labbaci B., Hammadi F., 2014, Dynamic buckling of steel tanks under seismic excitation: Numerical evaluation of code provisions, Engineering Structures, Volume 70, 1 July 2014, Pages 181-196
- Dudzik A., Obara P., 2010, Analiza stateczności belki Timoshenki spoczywającej na podłożu sprężystym, Architectura 9 (1) 2010, 17-29
- Eisley, J.G., Waas, A.M., 2011. Analysis of Structures: an Introduction Including Numerical Methods. John Wiley & Sons, Ltd.
- Eltaher, M.A., Mohamed, S.A., Melaibari, A., 2020, Static stability of a unified composite beams under varying axial loads, Thin-Walled Structures, 147,106488
- Emam, S.A., 2011. Analysis of shear-deformable composite beams in postbuckling. Compos. Struct. 94, 24–30
- Emam S., Lacarbonara W., 2022, A review on buckling and postbuckling of thin elastic beams, European Journal of Mechanics - A/Solids, Volume 92

- 
- Fung Y.C., 1965. *Foundation of Solid Mechanics*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall 1969.  
Wydanie polskie: *Podstawy mechaniki ciała stałego*, PWN Warszawa
- Gawęcki A., 1984, *Podstawy mechaniki konstrukcji prętowych*, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej,
- Gawęcki, A., 1998, *Mechanika materiałów i konstrukcji prętowych*. Poznań
- Ghiasian S. E., Kiani Y., Eslam M. R., 2015, Nonlinear thermal dynamic buckling of FGM beams, *European Journal of Mechanics A/Solids*, 54 (2015) 232-242
- Gladden J. R., Handzy N. Z., Belmonte A., Villermaux E., 2005, Dynamic Buckling and Fragmentation in Brittle Rods, *Physical Review Letters*, PRL 94, 035503 (2005)
- Greenhill A.G., 1881, On height consistent with stability, *Proc. Camb. Phil. Soc.* 1881, vol 4, s. 65-75
- Houbolt J.C., 1950, A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft, *J. Aero. Sci.*, 17, 1950, 540-550
- Hutchinson, J.W., Koiter, W.T., 1970. Postbuckling theory. *Appl. Mech. Rev.* 23 (12), 1353–1366
- Huang, Q., Shan, Y., Song, X., Li, L., Li, W., 2020, Static stability analysis of long-span earth-anchored suspension bridge, *Harbin Gongye Daxue Xuebao/Journal of Harbin Institute of Technology*, 52(6), pp. 140-148
- Humer, A., Irschik, H., 2011a. Large deformation and stability of an extensible elastica with an unknown length. *Int. J. Solid Struct.* 48 (9), 1301–1310
- Humer, A., 2013. Exact solutions for the buckling and postbuckling of shear-deformable beams. *Acta Mech.* 224, 1493–1525
- Jabareen M., Sheinman I., 2009, Dynamic buckling of a beam on a nonlinear elastic foundation under step loading, *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, Vol. 4, No. 7-8
- Jastrzebski P., Mutermilch J., Orłowski W., 1974, *Wytrzymałość materiałów*, Arkady, Warszawa

Jiao P., Borchani W., Hasni H., Lajnef N., 2017, Static and dynamic post-buckling analyses of irregularly constrained beams under the small and large deformation assumptions, International Journal of Mechanical Sciences, Volumes 124–125, May 2017, Pages 203-215

Jiao X., Ma J., 2017, Influence of the connecting condition on the dynamic buckling of longitudinal impact for an elastic rod, Acta Mechanica Solida Sinica volume 30, pages 291–298 (2017)

Jones, R.M., 2006. Buckling of Bars, Plates and Shells. Bull Ridge Publishing.

Karagiozova D., Jones N., 1995, Some Observations On The Dynamic Elastic-Plastic Buckling Of A Structural Model, Int. J. Impact En#no Vol. 16, No. 4, pp. 621-635, 1995 Elsevier Science Ltd, Printed in Great Britain

Karagiozova D., Jones N., 1996, Dynamic elastic-plastic buckling phenomena in a rod due to axial impact, Int. J. Impact Engng Vol. 18, Nos 7-8, pp. 919-947

Karagiozova D., Alves M., 2008, Dynamic Elastic-Plastic Buckling of Structural Elements: A Review, Appl. Mech. Rev. Jul 2008, 61(4): 040803 (26 pages)

Kasprzyk I., 2015, Stateczność dynamiczna – charakterystyka zjawiska, Nauka niejedno ma imię... Tom III, Wydawnictwa Uczelniane UTP, 2015, s. 33-42

Kączkowski Z., 1976, Metoda czasoprzestrzennych elementów skończonych, Arch. Inż. Łąd., 3(22), 365-378

Kenny S., Pegg N., Taheri F., 2000, Dynamic elastic buckling of a slender beam with geometric imperfections subject to an axial impulse, Finite Elements in Analysis and Design 35(3):227-246, DOI: 10.1016/S0168-874X(99)00067-0

Kleiber M., 1985, Metoda elementów skończonych w nieliniowej mechanice kontinuum, PWN, Warszawa-Poznań

Kotełko, M., 2017, Nośność i mechanizmy zniszczenia konstrukcji cienkościennych, Wydawnictwo Naukowe PWN



---

Kowal-Michalska K., 2010, About some important parameters in dynamic buckling analysis of plated structures subjected to pulse loading, *Mechanics and Mechanical Engineering*

Kuzkin V., 2015, Structural model for the dynamic buckling of a column under constant rate compression, pages 1-8

Lacarbonara, W., 2013. *Nonlinear Structural Mechanics. Theory, Dynamical Phenomena, and Modelling*. Springer Science Business Media, New York

Lagrange J., 1788, *Mecanique analytique*

La Salle, Joseph P., Lefschetz, Solomon, 1961, *Stability by Liapunov's direct method with applications*, *Mathematics in Science and Engineering*, vol. 4, New York: Academic Press

Lepik U., 2000, On dynamic buckling of elastic-plastic beams, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Volume 35, Issue 4, July 2000, Pages 721-734

Lepik U., 2001, Dynamic buckling of elastic-plastic beams including effects of axial stress waves, *International Journal of Impact Engineering*, Volume 25, Issue 6, July 2001, Pages 537-552

Liu Ch., Yang Q., Han Z., 2019, Numerical Study on Dynamic Buckling of Composite Bar with One Edge Simply Supported and Opposite Edge Clamped, *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 267

Mania R., 2010, Wyboczenie dynamiczne cienkościennych słupów z materiałów w lepkoplastycznych, *Zeszyty Naukowe Nr 1059, Politechnika Łódzka*

Melaibari, A., Khoshaim, A.B., Mohamed, S.A., Eltaher, M.A., 2020, Static stability and of symmetric and sigmoid functionally graded beam under variable axial load, *Steel and Composite Structures*, 35(5), pp. 671-685

Michel Anthony N., 1996, *Stability: The Common Thread in the Evolution of Feedback Control*, June 1996, „IEEE Control Systems Magazine

- Migda W., Jankowski R., 2010, Doświadczalne badania smukłych słupów poddanych deformacji i obciążeniom uderzeniowym podczas trzęsień ziemi, *Czasopismo Techniczne Budownictwo*, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, 3-B/2010, zeszyt 11
- Mindlin R. D., 1951, Influence of Rotatory Inertia and Shear of Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates, *J. Appl. Mech.*, vol. 18 (1951), str. 31-38
- Misiak J., 1993, *Obliczenia konstrukcji prętowych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa
- Misiak J., Stachura S., 2010, *Wybrane zagadnienia stateczności statycznej i dynamicznej konstrukcji prętowych i powłokowych*, Oficyna Wydawnicza WSEiZ w Warszawie, Warszawa
- Mitkowski, 1991, *Stabilizacja systemów dynamicznych*, Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne
- Mohamed, N., Mohamed, S.A., Eltaher, M.A., 2022, Nonlinear Static Stability of Imperfect Bio-Inspired Helicoidal Composite Beams, *Open Access, Mathematics*, 10(7),1084
- Naleszkiewicz J., 1958, *Zagadnienia stateczności sprężystej*, PWN, Warszawa
- Nayak, D.K., Dash, P., 2020, Static Stability Investigation of an Asymmetric Sandwich Beam in Temperature Environment, *Lecture Notes in Mechanical Engineering*, pp. 1203-1214
- Nayfeh, A.H., Emam, S.A., 2008. Exact solutions and stability of the postbuckling configurations of beams. *Nonlinear Dynam.* 54, 395–408
- Newmark N.M., 1959, A method of computation for structural dynamics, *J. Eng. Mech. Dir.*, ASCE, 85, EM 3, 1959, 67-94
- Nowacki W., 1972. *Dynamika budowli*, Arkady Warszawa
- Obara P., 2003, Stateczność dynamiczna prętów z uwzględnieniem odkształcalności postaciowej, *Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Budownictwo* z.101, Nr kol. 1595
- Olszowski B., Radwańska M., 2007, *Mechanika budowli*, wyd. 2, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków 2007

---

Olszowski B., M. Radwańska, 2010, *Mechanika budowli*, t. 1–2, Kraków 2010, Wyd. Politechniki Krakowskiej

Piechnik S., 1980, *Wytrzymałość materiałów*, PWN, Warszawa 1980, s. 304

Podhorecki A., Przedpełski J., 1982, Niektóre problemy obliczania prętów o zmiennej sztywności metodą różnic skończonych, *Archiwum Inżynierii Lądowej*, 28, 1-2, 1982, 67÷77

Podhorecki A., 1989. Stabilność rozwiązań w metodzie elementów czasoprzestrzennych, *Rozp. Inż.*, 37, ss.41-51

Podhorecki A., 1997, SSpj Method of Numerical Integration Applied for Solving of Differential Equations of Viscoelastic Medium, XIII Polish Conference on Computer Methods in Mechanics, Poznań, Poland, 5-8 May 1997, 1083-1090

Podhorecki A., 2005. *Podstawy teoretyczne metody elementów czasoprzestrzennych*, Wyd. Uczelniane ATR, Bydgoszcz

Priyanka, R., Pitchaimani, J., 2022, Static stability and free vibration characteristics of a micro laminated beam under varying axial load using modified couple stress theory and Ritz method, *Composite Structures*, 281,115028

Rakowski G., 1992, *Mechanika budowli. Ujęcie komputerowe*, Arkady, Warszawa

Rakowski G., Kacprzyk Z., 1993, *Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1993

Rahman T., Jansen E.L., Gurdal Z., 2011, Dynamic buckling analysis of composite cylindrical shells using a finite element based perturbation method, *Nonlinear Dynamics* 66(3):389-401

Reissner E., 1947, On bending of elastic plates. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1947, 5, 55–68

Remco I. Leine, 2010, The historical development of classical stability concepts: Lagrange, Poisson and Lyapunov stability, *Nonlinear Dyn* (2010) 59: s. 173–182

- Sarthak D., Prateek G., Vasudevan R., Polit O., Ganapath M., 2020, Dynamic buckling of classical/non-classical curved beams by nonlocal nonlinear finite element accounting for size dependent effect and using higher-order shear flexible model, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 125(9):103536
- Sewell, M.J., 1968a. A general theory of equilibrium paths through critical points I. *Proceedings of the Royal Society A* 306 (1485), 201–223
- Sewell, M.J., 1968b. A general theory of equilibrium paths through critical points II. *Proceedings of the Royal Society A* 306 (1485), 225–238
- Simitses, G.J., Hodges, D.H., 2006a. *Fundamentals of Structural Stability*. Elsevier Corp
- Tan, M.-Y., Cheng, W.-M., 2022, Nonlinear post-buckling of thin-walled box beams considering bending and torsion, *Jisuan Lixue Xuebao/Chinese Journal of Computational Mechanics*, 39(2), pp. 222-228
- Timoshenko S., Gere J., 1963, *Teoria stateczności sprężystej*, Arkady, Warszawa 1963
- Thompson, J.M.T., Hunt, G.W., 1973. *A General Theory of Elastic Stability*. Wiley, New York
- Thomson, J.M.T., Hunt, G.W., 1984. *Elastic Instability Phenomena*. John Wiley & Sons
- Tomski L. i in., 2004, *Drgania i stateczność układów smukłych*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 2004
- Waszczyszyn Z., Cichoń Cz., Radwańska M., 1990, *Metoda elementów skończonych w stateczności konstrukcji*, Wydawnictwo Arkady 1990
- Yang H., Lo S. H., Sze K. Y., Leung A. Y. T., 2012, Coupled static and dynamic buckling of thin walled beam by spline finite element, *Thin-Walled Structures*, Volume 60, November 2012, Pages 118-126
- Yu Y., Li Z., Yu J., Xu L., Zhao M., Cui Y., Wu H., Duan Q., 2021, Buckling analysis of subsea pipeline with integral buckle arrestor using vector form intrinsic finite thin shell element, *Thin-Walled Structures*, Volume 164, July 2021, 107533

---

Zhang Z., Taheri F., 2002, Numerical studies on dynamic pulse buckling of FRP composite laminated beams subject to an axial impact, *Composite Structures*, Volume 56, Issue 3, May–June 2002, Pages 269-277

Zienkiewicz O.C., 1972, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa

Zienkiewicz O.C., 1977, A new look at the Newmark, Houbolt and other time stepping formulas. A weighted residua approach. *Int. J. Earth. Eng. Struct. Dyn.*, 5, 1977, 413-418

Zienkiewicz O.C., Wood W.L., Hine N.W., 1984, A unified set of single stepp algorithms, *Int. I. Meth. Eng.*, 20, 1984, 1529-1552

Życzkowski M., 1988, *Stateczność prętów i ustrojów prętowych*, *Mechanika Techniczna*, Tom 9, *Wytrzymałość elementów konstrukcyjnych*, Praca zbiorowa pod red. M. Życzkowskiego, cz. 3, PWN, Warszawa, 241-380

---

**STRESZCZENIE****Model numeryczny wyboczenia dynamicznego prętów  
z wykorzystaniem Metody Elementów Skończonych****mgr inż. Izabela Kasprzyk**

**Słowa kluczowe:** stateczność pręta krępego, obciążenie ściskające zmienne w czasie, metoda elementów skończonych, metoda Newmarka, numeryczny model obliczeniowy

Przedmiotem niniejszej pracy jest wyboczenie dynamiczne prętów krępych, wstępnie zakrzywionych poddanych obciążeniu ściskającemu i zmiennemu w czasie  $P(t)$ . W pracy ułożono równania opisujące zagadnienie początkowo-brzegowe z uwzględnieniem przede wszystkim zaawansowanych nieliniowości geometrycznych. Sformułowano przy tych założeniach macierzowe równanie ruchu w metodzie elementów skończonych (MES), które rozwiązano z wykorzystaniem metody bezpośredniego całkowania równań ruchu (metodą Newmarka). Pewnym istotnym problemem było to, że macierz sztywności jest nieliniowa (zależna m.in. od przemieszczeń poprzecznych i podłużnych), co powoduje dalej powstanie nieliniowych równań algebraicznych (po zastosowaniu metody bezpośredniego całkowania równań ruchu). To doprowadziło do opracowania metody iteracyjnego rozwiązywania takich równań, z czym wiąże się zbieżność metody iteracyjnej i dokładności rozwiązania. Podstawowym problemem było przyjęcie definicji stateczności pręta w rozważanych przypadkach obciążeń dynamicznych. W pracy przyjęto umowne kryterium utraty stateczności. Biorąc powyższe założenia pod uwagę opracowano numeryczny model obliczeniowy prowadzący w efekcie do określenia m.in. stanu oznaczającego moment utraty stateczności pręta krępego przy rozważanych przypadkach obciążenia dynamicznego.

W celu walidacji opracowanego numerycznego modelu obliczeniowego napisano program komputerowy. Rozważano elementarne przypadki obciążeń siłą ściskającą, co umożliwiło przeprowadzenie pogłębionej analizy jakościowej i ilościowej. Walidacja ta wypadła pozytywnie.

Ostatecznie w rozważanej pracy sformułowano wnioski końcowe, tj. m.in. znaczenie naukowe i praktyczne rozważanego problemu naukowo-badawczego. Podano ponadto zalecenia odnoszące się do dalszych badań, a w szczególności prowadzące do bardziej zaawansowanych problemów stateczności konstrukcji przy obciążeniu zmiennym w czasie.

---

## ABSTRACT

### Numerical model of dynamic buckling of rods by using the Finite Element Method

mgr inż. Izabela Kasprzyk

**Keywords:** stability of a stocky rod, variable compressive load in time, finite element method, Newmark method, numerical computational model

The subject of this work is the dynamic buckling of stocky, pre-curved rods subjected to a time-varying compressive load  $P(t)$ . In this work, equations describing the initial-boundary problem were formulated taking into account, above all, advanced geometric nonlinearities. Based on these assumptions, the equation of motion was formulated in the finite element method (FEM), which was solved using the method of direct integration of the equations of motion (Newmark's method). A significant problem was that the stiffness matrix is non-linear (depending, among others, on transverse and longitudinal displacements), which further results in non-linear algebraic equations (after applying the method of direct integration of equations of motion). This led to the development of a method for iterative solving of such equations, which is related to the convergence of the iterative method and the accuracy of the solution. The basic problem was the adoption of the definition of rod stability in the considered cases of dynamic loads. The conventional criterion of the loss of stability was adopted in this work. Taking the above assumptions into account, a numerical computational model was developed, leading to the determination of, among others, the state denoting the moment of loss of stability of the stocky rod in the considered case of dynamic load.

A computer program was written in order to validate the developed numerical computational model. Elementary cases of compressive loads were considered, which allowed for an in-depth qualitative and quantitative analysis. This validation was positive.

Eventually, the final conclusions were formulated in the considered work, i.e. scientific and practical significance of the considered scientific and research problem. Recommendations are also given for further testing, in particular those leading to more advanced problems with time-varying compressive loading.